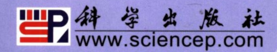
现代精算风险理论

〔荷〕R.卡尔斯　M.胡法兹　J.达呐　M.狄尼特 著
唐启鹤　胡太忠　成世学 译



(O-2111.0101)



ISBN 7-03-014530-5
定 价：32.00 元


中国科学院科学出版基金资助出版

现代精算风险理论

〔荷〕R.卡尔斯　M. 胡法兹　J. 达呐　M. 狄尼特 著

唐启鹤　胡太忠　成世学 译



科学出版社
北　京

图字: 01-2004-6065

内 容 简 介

本书对非寿险数学做了一个全面详尽的概述，内容包括期望效用模型、个体风险模型、聚合风险模型、破产概率、保费原理、奖惩系统、信度理论、广义线性模型、IBNR 技巧和风险排序. 为了便于教学，书中收入了丰富的例题，章末附有习题. 书中的内容和方法也适用于非寿险的研究，精算领域其它分支学科的研究，以及在精算实务中的应用研究.

本书可作为精算学、概率统计及有很强保险背景的定量金融、经济学专业本科高年级学生和研究生的教材，也可供有关科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

现代精算风险理论/(荷)卡尔斯(Kaas, R.)等著;唐启鹤等译. —北京: 科学出版社, 2005
ISBN 7-03-014530-5

Ⅰ.现… Ⅱ.①卡… ②唐… Ⅲ.保险-精算学 Ⅳ.F840.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 121056 号

责任编辑: 毕 颖 姚莉丽 / 责任校对: 包志虹
责任印制: 安春生 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
西源印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005 年 3 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2005 年 3 月第一次印刷 印张: 15 3/4
印数: 1—4 000 字数: 288 000

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新欣〉)

中文版序[1]

大约 25 年前, 本书第一、二作者开始在 Amsterdam 大学和 K. U. Leuven 大学讲授非寿险精算学. 那时我们找不到一本真正适用的教材, 于是只好对自己的讲义一遍遍地进行修改、增补, 逐渐形成了本书的荷兰文版本. 之后, 我们把本书由荷兰文翻译成英文, 又邀请现在的译者把它由英文翻译成中文. 我们这样做的初衷是使尽可能多的读者能够避开如我们当初撰写本书时走过的一些弯路, 从而尽快进入精算风险理论领域.

在本书的形成过程中, 我们认真挑选了一些与精算学的理论和实践紧密相关的内容. 除了传统的非寿险精算学内容, 如 Panjer 递归公式、经典破产理论以及信度理论外, 我们还收录了广义线性模型、IBNR 理论以及风险排序、同单调等.

我们有幸于 2004 年初访问了中国的一些高校, 在访问期间就精算学的教学和科研等问题与中国学者们进行了有益的探讨. 在此, 我们感谢严加安教授(中国科学院数学与系统科学研究院), 吴荣教授(南开大学数学系), 吴岚教授(北京大学金融数学系), 林正炎教授(浙江大学数学系), 王过京教授(苏州大学数学系), 汪荣明教授(华东师范大学统计系), 张文修教授、梅长林教授(西安交通大学理学院), 以及吴启宏教授(香港大学统计与精算系)等. 我们希望将来能够与包括上述同仁在内的中国学者们进行更广泛的交流与合作, 这无疑会使得广大的精算考生从中受益.

我们还希望借此机会感谢我们的同事唐启鹤博士, 这不仅因为他在整个翻译过程中付出的大量劳动, 更因为他在过去两年在 Amsterdam 大学进行博士后研究期间卓有成效的科研成果和令人愉快的合作精神. 我们为本书中译本的成功问世而向胡太忠教授和成世学教授表示衷心的祝贺和感谢. 此外, Elias Shiu 教授(Iowa 大学统计与精算系)、严加安教授、杨海亮教授(香港大学统计与精算系)等为发起这一计划提供过大量的支持, 我们一并致谢.

R. 卡尔斯(Amsterdam)
M.J. 胡法兹(Leuven)
J. 达呐(Leuven)
M. 狄尼特(Louvain-la-Neuve)

[1] 本书英文版的相关介绍详见 http://www1.fee.uva.nl/ke/act/people/kaas/ModernART.htm

英文版序

风险理论已经被公认为是精算学教育中一门重要的学科，这可以由精算学会列出的教学大纲以及精算咨询委员会的推荐意见中得到验证. 从而这一领域急需一本内容取材广泛的教科书.

欣闻这本关于风险理论的新书问世，我很高兴，该书在许多方面具有开创性的意义. 用溜冰或者健身术的行话来说，本教程由两部分构成，其一是必须掌握的规定部分，其二是可以自由选择的部分. 这必须掌握的第一部分包括第 1~4 章，它们与精算学会指定的官方材料相当. 这个特点也使得精算考生可以很好地使用本书去准备他们的考试. 本书的其余章节具有更自由的写作风格，例如第 10 章风险排序，正是该书作者们潜心研究的领域. 在此，我特别强调一下第 8 章，就本人所知，这部分内容应该是风险理论中第一次以书的方式介绍广义线性模型.

纵观全书，作者们为使这本著作便于为教学使用而特意做了许多努力，清晰的写作语言和内容丰富的习题便是佐证. 因此，我大力推荐这本专著作为教科书使用.

我为这一作品的问世而向作者们表示祝贺，同时也愿以广大师生的名义向他们表示感谢，衷心感谢他们为把本书翻译成英文而做的辛勤劳动. 我确信，本书作为教材一定能成功地为精算师生所广泛使用.

H. U. Gerber

2001 年 10 月 3 日于 Lausanne

前　言

本书对非寿险数学做了一个全面而详尽的概述. 本书最初是为 Amsterdam 大学和 Leuven 大学的精算学教学而写的, 但它的荷兰文版本已被其它几所大学以及荷兰精算学会所使用. 本书为希望在精算科学领域做深入理论研究的读者提供一个衔接. 书中的内容和方法不但适用于非寿险的研究, 而且同样适用于精算科学领域中其它分支的研究, 以及在精算实务中的应用研究.

本书除了一些标准理论外, 还包括许多与精算实务息息相关的研究方法, 如汽车保险保单的评估、保费原理以及 IBNR 模型等. 同时, 广义线性模型作为重要的精算统计工具也被囊括在书中, 该模型呈现出一些普通线性模型和回归所不具备的新特征, 从而为计量经济学家喜好. 此外, 我们还对信度理论给出一个简短的导引. 书中另一个能够激起风险理论专家浓厚兴趣的专题是对风险排序的研究.

本书可以反映精算风险理论领域研究的现状. 书中收录的大量成果均为上个世纪最后 10 年在精算领域发表的最新成果.

研究的模型和范例

在人寿保险学的模型中一个基本的特征是时间要素, 一般来说, 由起初的交纳保费到后来领取相应的养老金之间的时间跨度是几十年. 在非寿险数学中这种时间特征就显得不那么突出了, 然而需要建立的统计模型一般会更复杂一些. 本书前五章的内容属于非寿险精算学的基础部分, 其余章节简明扼要地介绍一些被传统的观点认为属于非寿险精算学的其它课题.

1. *期望效用模型*

保险人的存在是可以用期望效用模型进行解释的一个最好的例子. 在期望效用模型中, 被保险人是一个风险厌恶型的理性决策者, 为了争取一个安全的金融地位, 由 Jensen 不等式, 他会心甘情愿地付给保险人比自己面临的理赔额期望值多的保费. 这是一个要在不确定的情况下进行决策的体系, 在这一体系下, 被保险人做决策凭借的不是直接比较赔付额期望的大小, 而是比较与赔付额密切相关的期望效用.

2. *个体风险模型*

在个体风险模型以及下面要提到的聚合风险模型中, 关于保险合同的一个风险组合的总理赔额常常被表示为一个具有一定含义的随机变量. 举例来说, 我们

需要计算事件"一定的资金足以赔付这些理赔"的概率，或者计算该风险组合的水平 95%的在险价值(VaR)，即该风险组合累计分布函数的 95%的分位点. 在个体模型中，理赔总额被建模为由各保单生成的独立理赔变量之和. 这些理赔往往不可以假设为纯离散或者纯连续的随机变量. 对此我们将提出能够涵盖上述两种情况的一个记号. 尽管个体风险模型是最现实合理的，但是由于我们可获得的是被取整后的数据，而且不总是具有密度函数，该模型有时使用起来很不方便. 为了获得这一模型下的许多结果，我们将研究不同于卷积的其它手法，如在一些特殊场合我们采用类似于矩母函数的那样变换会有益于问题的解决. 我们也给出基于分布函数适当阶矩的逼近手法. 由于中心极限定理只涉及到两个矩，对于一些右尾很重的分布函数来说，它不可能提供足够的精度. 于是我们尝试两种涉及到分布函数三个矩的更精确的方法，它们是平移伽玛近似和正态功效近似.

3. *聚合风险模型*

聚合风险模型常常被用来近似个体风险模型. 在聚合风险模型中，风险组合被看作是一个随着时间变化而逐渐产生新理赔的保险风险过程. 这些理赔被假设为独立同分布的随机变量序列，并且独立于时间段内的理赔次数. 于是，总理赔额便可以表示为一个由独立同分布的理赔额变量相加构成的随机和. 通常，我们还假设理赔次数是一个具有特定均值的泊松变量. 至于单个理赔额的累积分布函数，我们用各保单理赔的累积分布函数的平均值来代替. 这些假设使得模型具有良好的性质，便于计算. 我们在书中给出了一些计算理赔总额分布函数的一些技巧，包括 Panjer 递归公式等.

4. *破产模型*

在破产模型中需要研究的问题是保险人运营的稳健性. 设逐年收取的保费固定不变，保险人在时间 $t=0$ 的初始资本为 u，他的资本金会随着时间线性递增，但每当一个理赔发生时资本金过程就会有一个下跳. 如果在某个时刻该资本金过程取负值，我们便说破产事件发生了. 假设年保费和理赔过程保持不变，当研究保险人的资产与他的负债是否匹配时，破产概率是一个很好的指标. 如果其资产与负债匹配得不好，那么保险人会采取一些措施来加以调整，如增加再保份额，提高保费或者增加初始资本金.

只有当理赔额分布为指数分布的混合或线性组合时，计算破产概率的解析方法才是有效的. 当理赔额服从离散分布而且没有太多的支撑点时，可以编制一些计算程序来实现. 我们还可以给出破产概率精确的上下界估计. 在很多场合下，我们更关心的是破产概率的一个简单的指数型上界，即 Lundberg 界，而不是破产概率本身.

5. 保费原理

现在假设风险变量的累积分布函数已知, 或者至少它的一些特征如期望和方差等已知, 一个保费原理会对该风险变量赋予一个实数值, 用以表示对承担该风险一方的经济补偿. 注意我们现在仅仅研究风险的保费原理, 而不考虑保险公司运作时的一切附加费用. 由大数定律, 为了避开终极破产事件的发生, 保费总额必须至少等于理赔总额的期望值. 但在事实上, 因为保险人的风险系统很大, 在征收的保费中应该还含有一个正的负荷. 保险人通过这些正的负荷预先建造了一个资金储备, 来达到避开破产事件发生的目的. 我们将介绍一些保费原理, 以及刻画保费原理的一些最重要的性质. 保费原理的选择强烈地依赖于这些性质所起的作用, 没有一致最优的保费原理.

6. 奖惩体系

对于一些险种特别是汽车保险来说, 仅仅依据预先知道的那些因素去决定一种保费征收办法是不够的. 一些风险要素如保单持有人的种族和性别等, 虽然它们直接作为保费制定的依据是不恰当的, 但是它们的作用应该被考虑进去; 此外, 还应该考虑到有一些不可观察的风险要素的作用, 这些风险要素包括保单持有人的身体健康状况、反应能力和发生车祸的倾向性等. 为此, 一些国家运用一种经验评估体系, 在这样的体系中, 保险公司一方面凭借那些预先知道的风险要素如保险类型、汽车价格和载重量等来制定的保费, 另一方面又使用某种奖惩体系对保费进行调整, 就是说, 保单持有人能够在没有出现理赔的年份少缴保费, 而在有一次乃至多次理赔记录的年份追加更多的保费. 这种方式征收的保费很好地反映了汽车驾驶员的驾驶水平. 这种情形可以被模拟为一个 Markov 链.

7. 信度理论

同一保单下的理赔情况会由于两种不同的原因而有所差别. 第一个原因是风险变量的内在属性, 该属性通过一个风险参数表现出来. 假设在相当长的一个期限内保单被监控没有变化, 那么上述风险参数代表年理赔额的平均情况. 导致同一保单下理赔情况不同的另一个原因是保单持有人的运气成分, 这个纯随机的运气因素导致了理赔额逐年偏离上述风险参数. 信度理论认为风险变量的属性由满足一定结构的分布函数表现出来的, 并且在给定风险属性的条件下, 实际理赔情况是从与平均值分布相同的母体中抽取的一个样本. 在最小二乘意义下, 对下一年理赔情况的最佳线性预测是单一合同理赔情况与整个风险组合理赔情况的某种形式的加权平均. 这里提到的加权因子可以视为附着在单一理赔情况的一个信度因子, 并且称这样计算出来的保费为信度保费. 作为一个特例, 基于伽玛-泊松混合模型, 我们研究汽车保险的一个奖惩系统.

8. 广义线性模型

在精算统计学领域的许多问题可以归结为广义线性模型 (GLM). 除了假设误差项服从正态分布外, 我们还可以考虑具有泊松、伽玛和二项分布等形式的随机型误差. 此外, 观察变量的期望值不一定必须是回归量的线性函数, 有时它可以是一些协变量的线性变换的一个函数, 如对数函数. 在最后这种情形下, 我们可以得到适用于大多数保险场合的乘积模型.

用这种方法我们可以处理在 IBNR 型理赔下盈余的估计问题, 关于 IBNR 型理赔请见下文. 我们也可以容易地解决来自第 i 地区, 属于第 j 个级别且驾驶汽车载重量为 w 的驾驶员的保费估计问题.

在信度模型中一般有许多随机影响, 但在 GLM 模型中这些作用则是相对确定的, 尽管仍然未知. 对于 GLM 模型来说, 我们可以寻求计算软件来处理众多问题.

9. IBNR 技巧

我们简记那些导致理赔的事件已经发生但赔付行为还没有进行的潜在的理赔为 IBNR 理赔, 对从事实务的精算师来说, 一个重要的统计问题是预测这些潜在的 IBNR 理赔总额. 对这个总额进行估计所采用的大多数手法是基于所谓的流量三角形, 按照起始年和发展年对理赔总额进行分组. 在 GLM 模型这一特殊场合, 许多传统的精算处理方法常常归结为极大似然估计法.

10. 风险排序

能够在未来随机收益变量或者随机损失变量中表达出自己的风险偏好, 这应该是作为精算师这个职业的精髓所在. 因此, 随机排序就成了他接受的教育中以及他应该具备的技能中极为重要的一个部分. 有时, 我们遇见两个损失变量 X 和 Y, 其中变量 Y 在一定的意义下"大于"变量 X, 这时一个明智的决策者会偏好损失变量 X. 由所有风险厌恶型的决策者构成的一个较小群体愿意去分析应该偏好哪个风险. 在这种情形下, 风险变量 Y 可能"大于"变量 X, 或仅是 Y"更扩散"一些, 但这使得 Y 不受欢迎. 当我们把"更扩散"理解为其累积分布函数具有更厚的尾的时候, 我们便得到了一个风险排序方法, 它具有许多诱人的性质. 例如, 以这些风险变量为单一项构成复合分布函数, 在零效用保费、破产概率和停止-损失保费的意义下, 原来我们倾向的那个风险变量将使得其对应的复合分布作为风险来说仍然优于另一个. 可以证明, 第 3 章的聚合风险模型较之它要去逼近的个体风险模型更扩散一些, 从而原则上说, 在考虑要征收的保费, 应储备的资金以及 VaR 等问题时, 使用聚合模型会得到一些更保守的决策. 我们还可以证明, 如果一个停止-损失保险按照第 1 章介绍的自留额方差的意义下为最优的, 那么当其它情况不变时, 以风险厌恶型决策者的眼光来看它还是更可取的.

有时, 在还没有得到完全的信息下风险的停止-损失保费就需要被确定下来. 假设风险的期望、方差和一个相关的上界均已知, 我们将给出一个计算可能的最大停止-损失保费的方法.

在个体和聚合模型以及破产模型中, 我们假设理赔额是相互独立的非负随机变量列. 许多时候这种假设是不现实的. 例如, 一对夫妇的两个死亡风险变量之间, 以及相邻房屋的地震风险变量之间均存在明显的相依关系. 又如, 在人寿保险中, 考虑那些产生于同一个保单的连续赔付, 如果由于死亡而导致赔付停止或开始, 或者有随机利率的作用, 那么这些赔付变量之间也有着明显的相依关系. 我们将给出一个简短的介绍, 以阐明随机排序在这一情形的应用. 设一组随机变量列, 它们的联合分布未知, 但每一个边缘分布已知, 如果这些变量尽可能地相依, 从而使得不可能出现一个被另一个规避的情况, 那么这时它们的停止-损失保费应该达到最大.

教学方面

由于本书已经被 Amsterdam 大学和一些别的地方使用 10 多年了, 我们有机会储备了一系列的考试试卷, 从而形成现在的教材中内容丰富的习题库. 同时书中还给出许多例题, 使本书成为一本名副其实的教科书. 加[♠]标记的习题有一定的难度, 初学者可以跳过去.

本书所需的数学基础相当于定量经济学(计量经济学或精算学)或者数理统计学专业本科教学大纲第一阶段要求的水平, 本书可以在上述学制的最后一年使用, 或为精算学专业, 或带有很强保险背景的定量金融经济学专业学生安排在硕士阶段使用. 为了使非精算专业学生也使用本书, 我们略去了关于人寿保险数学的一些记号和专业术语. 因此, 应用数学专业或者统计专业的学生, 如果对保险的随机方面有兴趣的话, 也可以学习本书. 我们在写作过程中一直努力地保持着本书在数学上的严谨性和在统计学上的灵活性, 例如, 我们按惯例使用了矩母函数这个术语, 而回避了特征函数和测度论的相关术语. 回归模型的先验分布不需要掌握, 但对本书的学习有帮助.

为了有助于学生的学习, 我们在书末针对书中的大部分习题单独列出一节, 对有的习题我们给出了最终答案以方便读者检查自己的工作, 而对有的习题我们只给出一些有益的提示. 我们还列出了一个详尽的名词索引, 和一些可能在考试中需要用到的图表. 我们没有列出所有相关参考文献以涵盖书中提到的每一个结果, 而是局限于能对所研究的课题提供更多细节, 且为进一步学习提出建议的那些有益的书和论文.

我们对计算方法投入了大量的精力, 同时对一些经典的近似方法如中心极限定理(CLT)也给予了重视. 这些计算方法不仅快速, 而且常常表明是惊人地精确,

它们还对参数特性提供了一些解答, 使得当数据有细微变化时人们不必再重复一切计算. 我们希望在此强调一下, "精确"的方法只有在输入的数据准确的条件下才有意义. 不准确的输入数据导致的误差量级常常会远大于由近似方法导致的误差.

本书所使用的记号与数理统计和非寿险数学一致. 请参阅 Bower et al. (1986), 该书的非寿险部分使用的记号类似于本书第一部分.

关于本次翻译

本书是荷兰文版本的译本, 原荷兰文版本已经在荷兰和比利时的一些大学使用了 10 多年. 这次的译本对原荷兰文版本做了一些修改和增补. 由于仅仅是从本书荷兰文的第二版出版至今的短短几年时间内关于凸序和同单调的研究才变得活跃起来, 我们在本次英文本中特意增加了一节来介绍这一研究领域的成果. 此外, 在第6章, 原来的荷兰-比利时奖惩系统被改为现在一般的奖惩系统. 除此之外, 本书大部分内容与原荷兰文版本内容一致.

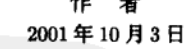
致谢

首先, 我们特别要感谢 David Vyncke, 他不仅很好地将本书翻译成英文, 而且出色地完成了 TEX 转化, 他还帮助绘制了图表.

我们得到了许多人的帮助, 我们以前的学生(但现在是我们的同事)Angela van Heervaarden 和 Dennis Dannenburg 对本书早期的以及现在的版本都做过仔细的校对. Richard Verrall 和 Klaus Schmidt 对本书提出了一些建议, 我们一并致谢. 最后我们还要感谢使用本书的读者、学生、教师和相关人员, 多谢他们的许多宝贵建议.

作　者

2001 年 10 月 3 日



目　录

第 1 章　效用理论与保险

§1.1　引　言

保险业之所以存在是因为人们愿意以高于他们期望索赔额的价格获得保险保障. 因此，保险公司收取高于期望理赔额的保费. 在本章，我们概述一个经济学理论，并用之来解释为什么被保险人乐意支付高于 *纯保费*(承保损失的数学期望)的保费. 解释这个现象的理论假设决策者使用函数值 $u(w)$ (被称为 *效用函数*) 去衡量其财富，而不是用财富 w 本身去衡量，尽管通常他们自己都没有意识到这一点. 如果决策者必须在随机损失 X 和 Y 之间做出选择，那他会比较 $E[u(w-X)]$ 和 $E[u(w-Y)]$, 并选择期望效用较大的那个损失. 利用这个模型，对于随机损失 X, 拥有财富 w 的被保险人就可以决定为此支付的最大保费 P^+. 这可由均衡方程 $E[u(w-X)]=u(w-P)$ 求出. 对于由均衡方程决定的保费 P^+, 被保险人认为投保与否的效用没有差别. 这个模型也可用于保险合同的另一方. 保险人使用自己的效用函数和可能的附加费用，决定一个最小保费 P^-. 如果被保险人的最大保费 P^+ 超过保险公司的最小保费 P^-, 那么当保费界于 P^- 与 P^+ 之间时，保险公司与被保险人的双方效用都增加了.

尽管不能精确地决定一个人的效用函数，但我们可以给出它的一些合理的性质. 例如，更多的财富通常都意味着更高的效用水平，因此 $u(w)$ 应是一个非减函数. 同时，理性的决策者都是 *风险厌恶型* 的假设也是合乎逻辑的，这就意味着，他们在确定损失与具有同样期望值的随机损失之间，他们偏好确定的损失. 我们将给出一些具有这些性质的效用函数族，并研究其优缺点.

假设被保险人可以在一份具有固定免赔额的保单和一份具有相同期望理赔额，并且保费相同的保单之间做出选择，可以证明，对于被保险人来说，前者是更好的选择. 如果再保险公司承保了保险人所有的风险组合，那么具有固定的最大自留风险的再保险称之为 *停止损失再保险*. 根据风险排序理论，我们可以看到这种再保险类型对于风险厌恶型的决策者来说是最优的选择. 在本章，我们将证明停止损失再保险可以使自留风险的方差达到最小. 我们还将讨论在哪种情形下，保险人偏好 *比例再保险*, 即再保险赔付额与理赔额成比例的再保险类型.

§1.2　期望效用模型

假设一个个体面临损失额为 B, 发生概率 0.01 的风险，他可以将损失进行投

保，并愿意为这份保单支付保费 P. B 和 P 之间有何种关系？如果 B 非常小，那么 P 几乎不会大于 $0.01B$；然而，如果 B 略微大一点，如 500, 那么 P 就可能比 5 稍大一些；如果 B 非常大，那么 P 就会比 $0.01B$ 大很多，因为这么大的损失一但发生可以导致破产. 因此很明显，一个风险的保费不是*齐次的*, 即保费不与风险成比例.

例 1.2.1(圣彼得堡悖论)　以价格 P 元参与如下的游戏. 抛掷一枚均匀的硬币，直到出现正面为止. 如果投掷 n 次才首次出现正面，则游戏的参与者就可以获得 2^n 元. 因此，从该游戏中获得的期望收益是 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \infty$. 然而，除非 P 很小，否则很少有人会参加这样的游戏，这就意味着人们并不仅仅看到期望收益. ∇

在经济学中，由冯 · 诺伊曼 (von Neumann) 和摩根斯特恩 (Morgenstern) 于 1947 年引入的模型描述了决策者怎样在不确定的结果中做出选择. 如果决策者能够在潜在的随机损失 X 中进行一致的选择，那么就存在一个评估财富 w 的效用函数 $u(\cdot)$, 使得由此所做出的决策与基于期望 $E[u(w-X)]$ 而比较损失 X 所做出的决策正好相同. 按这种方式，复杂的决策就简化为简单的数值比较问题.

为比较 X 和 Y, 效用函数 $u(x)$ 与其线性变换 $a\,u(x)+b$ $(a>0)$ 是等价的，因为二者导致相同的决策：

$$E[u(w-X)] \leqslant E[u(w-Y)] \quad \text{当且仅当}$$
$$E[a\,u(w-X)+b] \leqslant E[a\,u(w-Y)+b]. \tag{1.1}$$

因此，从等价的效用函数族中，我们可以选取其中的一个，例如要求 $u(0)=0$ 和 $u(1)=1$. 假设 $u'(0)>0$, 我们也可以使用效用函数 $v(\cdot)$ 使得 $v(0)=0$ 和 $v'(0)=1$:

$$v(x)=\frac{u(x)-u(0)}{u'(0)}. \tag{1.2}$$

在实际中，我们几乎不可能确定使用什么样的效用函数. 效用理论仅仅说明了效用函数的存在性. 我们可以向决策者提出大量的问题，通过他对这些问题的回答来重建该决策者的效用函数. 这些问题类似于："为避免以概率 q 发生损失 1, 你愿意支付多大保费 P?" 于是，由 $u(0)=0$, $u(-1)=-1$ 和初始财富 0, 对于任意一个 P 值，我们有

$$u(-P)=(1-q)u(0)+q\,u(-1)=-q. \tag{1.3}$$

但这种确定效用函数的做法又有其局限性：随着询问的持续进行，决策者会很快变得急躁起来，他的决策也显得越来越不协调一致. 比如，决策者回答，愿意为相对较小的风险支付较大的保费，或者是为几乎同样的风险支付完全不同的保费. 这类错误总是不可避免的，除非决策者明确地使用了一个效用函数.

例 1.2.2(偏好风险与厌恶风险) 假设一个拥有资本 w 的个体使用效用函数 $u(\cdot)$ 衡量其财富的价值. 他面临两种选择: 以概率 1/2 损失 b 元, 或仅支付固定的 $b/2$ 元. 当 $b=1$ 时, 他选择前者; 当 $b=4$ 时, 他选择后者; 当 $b=2$ 时, 两种选择等价. 很明显, 这个人喜欢一定程度的冒险, 但他又害怕大的损失, 就像拥有火灾保单的个人同时愿意参与抽奖的活动. 对于这样的决策, 效用函数 $u(\cdot)$ 应该具有怎样的形式?

在这种情况下, w 的数值是无关紧要的: 通过把效用函数平移 w, 我们可以选择 $w=0$. 进一步, 我们假设 $u(0)=0$ 和 $u(-1)=-1$. 因为决策者认为以概率 1/2 发生损失 2, 与发生确定的损失 1 ($b=2$) 等价. 这蕴涵了

$$u(-1)=\frac{1}{2}(u(0)+u(-2)). \tag{1.4}$$

当 $b=1$ 和 $b=4$ 时, 我们显然有

$$u\left(-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}(u(0)+u(-1)) \quad 和 \quad u(-2)>\frac{1}{2}(u(0)+u(-4)). \tag{1.5}$$

由这些不等式可知, 函数 $u(\cdot)$ 既不是凸的, 也不是凹的. 注意, 我们使用的术语 "凸函数" 表示 "向上凹的函数", 而 "凹函数" 表示 "向下凹".

因为 $u(0)=0$ 和 $u(-1)=-1$, 所以由 (1.4) 和 (1.5) 得

$$u(-2)=-2, \quad u\left(-\frac{1}{2}\right)<-\frac{1}{2} \quad 和 \quad u(-4)<-4. \tag{1.6}$$

经过这 5 个点的光滑曲线, 当 $-1<x<0$ 和 $x<-2$ 时区域位于对角线之下, 当 $x\in(-2,-1)$ 时区域位于对角线之上. ∇

我们假设效用函数非减, 尽管相反的情况也是可以想象的, 如资本征税. 因此, *边际效用* 是非负的: $u'(x)\geqslant 0$. 一类重要的决策者是 *厌恶风险型* 的, 他们的 *边际效用* 是递减的, 因此 $u''(x)\leqslant 0$. 注意我们并不严格区分 "递增" 和 "非减", 如果需要的话, 我们会用 "严格递增". 为了解释为什么这种类型的决策者称之为风险厌恶型, 我们使用如下的基本定理 (证明见习题 §1.2 第 1 题, 第 2 题).

定理 1.2.3(Jensen 不等式) 如果 $v(x)$ 是一个凸函数, Y 是一个随机变量, 则

$$E[v(Y)]\geqslant v(E[Y]), \tag{1.7}$$

其中等号成立当且仅当 $v(\cdot)$ 在 Y 的支撑集上是线性的或 $\mathrm{Var}(Y)=0$. ∇

由此不等式可以得到, 对于一个凹的效用函数 $u(\cdot)$, 有

$$E[u(w-X)]\leqslant u(E[w-X])=u(w-E[X]). \tag{1.8}$$

因此这种决策者被称为厌恶风险型：他宁愿支付固定数额的 EX, 而不愿意面对随机损失 X.

现在，假设一个厌恶风险型的被保险人拥有财富 w, 使用效用函数是 $u(\cdot)$, 他以保费 P 获得对损失 X 的保险保障. 如果

$$E[u(w-X)] \leqslant u(w-P), \tag{1.9}$$

那么他的期望效用将会提高. 因为 $u(\cdot)$ 是一个非减的连续函数，所以这等价于 $P \leqslant P^+$, 其中 P^+ 代表被保险人愿意支付的最大保费，它是以下效用均衡方程的解

$$E[u(w-X)] = u(w-P^+). \tag{1.10}$$

另一方面，设保险人的效用函数为 $U(\cdot)$, 资本为 W. 如果 $E[U(W+P-X)] \geqslant U(W)$, 那么保险人将以保费 P 承保损失 X. 显然，$P \geqslant P^-$, 这里 P^- 表示保险人要求的最小保费，可从反映保险人状况的效用均衡方程中解出：

$$U(W) = E[U(W+P^- - X)]. \tag{1.11}$$

如果 $P^+ \geqslant P^-$, 那么交易会同时增加保险人与被保险人双方的期望效用.

从理论的角度看，保险人实质上被视为是风险中性的. 因此，对任意风险 X, 如果不考虑额外费用，保费 $E[X]$ 已足够. 因此，对于任意风险 X,

$$E[U(W+E[X]-X)] = U(W). \tag{1.12}$$

在习题 §1.2 第 3 题中，我们可以证明这样的效用函数 $U(x)$ 一定是线性的.

例 1.2.4(风险厌恶系数)　给定效用函数 $u(x)$, 我们如何近似计算风险 X 最大保费 P^+?

以 μ 和 σ^2 分别表示 X 的均值与方差. 利用 $u(\cdot)$ 在点 $w-\mu$ 处级数展开的前几项，我们有

$$\begin{aligned} u(w-P^+) &\approx u(w-\mu) + (\mu - P^+)u'(w-\mu); \\ u(w-X) &\approx u(w-\mu) + (\mu - X)u'(w-\mu) + \frac{1}{2}(\mu - X)^2 u''(w-\mu). \end{aligned} \tag{1.13}$$

在后面式子的两边同时取期望，得到

$$E[u(w-X)] \approx u(w-\mu) + \frac{1}{2}\sigma^2 u''(w-\mu). \tag{1.14}$$

把 (1.10) 代入 (1.14), 由 (1.13) 可以得到

$$\frac{1}{2}\sigma^2 u''(w-\mu) \approx (\mu - P^+)u'(w-\mu). \tag{1.15}$$

因此，风险 X 的最大保费 P^+ 近似为

$$P^+ \approx \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{u''(w-\mu)}{u'(w-\mu)}. \tag{1.16}$$

由此我们引入以下的定义：效用函数 $u(\cdot)$ 在财富 w 处的 (绝对)风险厌恶系数$r(w)$ 为

$$r(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}. \tag{1.17}$$

于是风险 X 的最大保费 P^+ 近似为

$$P^+ \approx \mu + \frac{1}{2} r(w-\mu)\sigma^2. \tag{1.18}$$

注意到 $u(x)$ 用 $a\,u(x)+b$ 替换时，$r(w)$ 并没有改变. 从 (1.18), 我们可以看到风险厌恶系数真正反映了风险厌恶的程度：对风险厌恶程度越高，准备支付的保费也越大. ∇

§ 1.3 效用函数族

除线性函数外，也存在其它合适的效用函数族，它们具有我们感兴趣的一些性质：

$$\begin{array}{lll}
\text{线性效用函数} & u(w) = w, & \\
\text{平方效用函数} & u(w) = -(\alpha - w)^2 & (w \leqslant \alpha), \\
\text{对数效用函数} & u(w) = \log(\alpha + w) & (w > -\alpha), \\
\text{指数效用函数} & u(w) = -\alpha e^{-\alpha w} & (\alpha > 0), \\
\text{幂效用函数} & u(w) = w^c & (w > 0,\ 0 < c \leqslant 1).
\end{array} \tag{1.19}$$

这些效用函数及其线性变形，都有非负的、递减的边际效用；对于平方效用函数，当 $w \geqslant \alpha$ 时，令 $u(w) = 0$. 线性效用函数的风险厌恶系数为 0, 而指数效用函数的风险厌恶系数等于 α. 其它效用函数的风险厌恶系数都可以表示为 $(\gamma + \beta w)^{-1}$, 其中 γ 和 β 是参数，见习题 §1.3 第 1 题.

例 1.3.1(指数保费) 假设一保险人使用参数为 α 的指数效用函数，对于风险 X, 最小保费 P^- 应为多少？

把 $U(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$ 代入均衡方程 (1.11) 得

$$P^- = \frac{1}{\alpha}\log(m_X(\alpha)), \tag{1.20}$$

其中 $m_X(\alpha) = E[e^{\alpha x}]$ 是 X 的矩母函数. 我们看到指数保费与保险人当前的财富 W 独立，这也与风险厌恶系数是常数相吻合.

最大保费 P^+ 的表达式同 (1.20), 见习题 §1.3 第 3 题, 但是此时 α 代表被保险人的风险厌恶系数. 假设损失 X 服从 $\mathrm{Exp}(\beta)$ 分布, 其中 $\mathrm{Exp}(\beta)$ 表示参数为 β 的指数分布. 令 $\beta = 0.01$ 得 $E[X] = 1/\beta = 100$. 如果被保险人的效用函数是参数为 $\alpha = 0.005$ 的指数效用函数, 那么

$$P^+ = \frac{1}{\alpha}\log(m_X(\alpha)) = 200\log\left(\frac{\beta}{\beta-\alpha}\right) = 200\log(2) \approx 138.6, \tag{1.21}$$

因此被保险人愿意在纯保费 $E[X]$ 之上附加相当数量的额外保费.

由例 1.2.4 中近似式 (1.18) 得

$$P^+ \approx E[X] + \frac{1}{2}\alpha\mathrm{Var}[X] = 125. \tag{1.22}$$

显然, 近似表达式 (1.22) 随 α 递增, 如果 X 是方差有限的非负随机变量, 则 (1.20) 所决定的保费也是递增的, 具体证明如下. 令

$$v(x) = x^{\alpha/\gamma}, \tag{1.23}$$

其中 $0 < \alpha < \gamma$, 则 $v(\cdot)$ 是严格凹函数. 由 Jensen 不等式知

$$v(E[Y]) > E[v(Y)] \tag{1.24}$$

对任意方差大于 0 的随机变量 Y 成立. 取 $Y = \exp(\gamma X)$, 则 $v(Y) = \exp(\alpha X)$ 且

$$\left\{E[e^{\gamma X}]\right\}^{\alpha} = \left\{(E[Y])^{\alpha/\gamma}\right\}^{\gamma} = \{v(E[Y])\}^{\gamma} > \{E[v(Y)]\}^{\gamma} = \left\{E[e^{\alpha X}]\right\}^{\gamma}. \tag{1.25}$$

于是,

$$\{m_X(\alpha)\}^{\gamma} < \{m_X(\gamma)\}^{\alpha}, \tag{1.26}$$

这蕴涵了对任意 $\gamma > \alpha$ 有

$$\frac{1}{\alpha}\log(m_X(\alpha)) < \frac{1}{\gamma}\log(m_X(\gamma)). \tag{1.27}$$

正如近似表达式 (1.18) 那样, 当 $\alpha \downarrow 0$ 时, (1.20) 的极限就是纯保费. 这可以从 $\log(m_X(t))$ 的级数展开立即得到, 见习题 §1.3 第 4 题. ▽

例 1.3.2(平方效用函数)　假设被保险人的效用函数为 $u(w) = 10w - w^2$, $w < 5$. 对损失额为 1, 以概率 1/2 发生的风险进行承保的保单, 其最大保费 P^+ 作为 $w(w \in [0,5])$ 的函数是何种形式? 如果 w 增加, 保费会如何变化?

我们再一次求解均衡方程 (1.10). 发生损失 X 之后的期望效用为

$$E[u(w-X)] = 11w - \frac{11}{2} - w^2, \tag{1.28}$$

以及支付保费 P 之后的效用为

$$u(w-P)=10(w-P)-(w-P)^2. \tag{1.29}$$

根据均衡方程 (1.10), (1.28) 和 (1.29) 的右端应当相等. 通过计算, 我们可以得到近似的最大保费

$$P=P(w)=\sqrt{\left(\frac{11}{2}-w\right)^2+\frac{1}{4}}-(5-w),\quad w\in[0,5]. \tag{1.30}$$

可以验证 $P'(w)>0$, 见习题 §1.3 第 2 题. 我们注意到, 一个使用平方效用函数的决策者, 随着其财富逐渐增加至临界值 5, 他愿意支付的保费也随之增加. 基于这个性质, 平方效用函数在模拟风险厌恶型决策者的行为方面, 被认为是不太合适的. 当然, 平方效用函数也有它的优点, 因为只要知道风险的均值和方差就足够应付计算之用. ▽

例 1.3.3(不可保的风险) 某决策者使用风险厌恶系数为 $\alpha>0$ 的指数效用函数, 他想对分布为 $\Gamma(n,1)$ 的风险进行投保, 其中 $\Gamma(a,b)$ 表示参数为 a,b 的伽玛分布. 确定 P^+, 并证明 $P^+>n$. 何时 $P^+=\infty$, 此时说明了什么?

由 (1.20) 得

$$P^+=\frac{1}{\alpha}\log(m_X(\alpha))=\begin{cases}-\dfrac{n}{\alpha}\log(1-\alpha), & \text{当 } 0<\alpha<1 \text{ 时},\\ \infty, & \text{当 } \alpha\geqslant 1 \text{ 时}.\end{cases} \tag{1.31}$$

因为 $\log(1+x)<x, \forall x>-1, x\neq 0$, 我们有 $\log(1-\alpha)<-\alpha$, 因而 $P^+>E[X]=n$. 所以, 计算出的保费大于纯保费. 如果 $\alpha\geqslant 1$, 则 $P^+=\infty$, 这表明决策者愿意支付任何有限的保费. 按照效用理论, 如果风险厌恶系数为 $\alpha\geqslant 1$, 那么承保该风险的保险人对于任何有限的保费 P, 都会遭受损失, 因为 $P^-=\infty$. 对于这些保险人来说, 这种风险是 不可保的. ▽

注 1.3.4(Allais 悖论 (1953), Yaari 对偶理论 (1987)) 考虑如下可能的资本收益:

$$X=1\,000\,000,\quad \text{以概率 } 1;$$

$$Y=\begin{cases}5\,000\,000, & \text{以概率 } 0.10,\\ 1\,000\,000, & \text{以概率 } 0.89,\\ 0, & \text{以概率 } 0.01;\end{cases}$$

$$V=\begin{cases}1\,000\,000, & \text{以概率 } 0.11,\\ 0, & \text{以概率 } 0.89;\end{cases}$$

$$W=\begin{cases}5\,000\,000, & \text{以概率 } 0.10,\\ 0, & \text{以概率 } 0.90.\end{cases}$$

试验经济学表明，在 X 和 Y 之间，很多人会选择 X，但与此同时，他们偏好 W 甚于 V. 这个结果与期望效用理论相违背，因为在假设初始财富为 0 之下，后一偏好 $E[u(W)] > E[u(V)]$ 等价于 $0.11\,u(1\,000\,000) < 0.1\,u(5\,000\,000) + 0.01\,u(0)$，但前一个偏好导致相反的不等式. 显然，期望效用并不总是能充分地描述决策者的行为. 从该例可以判断，完全没有风险的状态与期望效用指标相比，对决策者似乎更具有吸引力. 这种吸引力诱导人们作出非理性的决定.

Yaari (1987) 提出了另一套具有相似公理化基础的风险决策理论. Yaari 的对偶理论放弃了效用函数的做法，不用转换后的财富水平 (效用) 来计算"必然的等价"，而是使用大额损益的扭曲概率. 但是，该理论也导致与效用理论非常类似的悖论. ∇

§1.4 停止损失再保险的最优性

再保险合同通常只承保保险人的一部分风险. 停止损失 (再) 保险承保损失超出指定免赔额的超额部分. 它的定义如下：如果发生的损失为 X (我们假设 $X \geqslant 0$)，则理赔支付为

$$(X-d)_+ := \max\{X-d, 0\} = \begin{cases} X-d, & \text{当 } X > d \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } X \leqslant d \text{ 时}. \end{cases} \tag{1.32}$$

保险人保留了损失小于 d 的风险 (他的 **自留额**)，同时再保险公司支付损失的剩余部分. 在再保险实务中，d 被称为优先得到赔偿的部分，它等于保险人对每一单独索赔的最大支付金额. 这种形式的保险保障被称为"停止损失"的原因是显然的：从保险人的角度看，其损失不会超过 d. 我们将证明，不论保险人自留损失的方差如何，停止损失再保险都是最优的.

对于停止损失保险合同，其纯保费 $E[(X-d)_+]$ 称为 **停止损失保费**，记为

$$\pi_X(d) := E[(X-d)_+]. \tag{1.33}$$

在离散情形，$F_X(x)$ 为阶梯函数，其在 x 处的跳为 $f_X(x)$; 在连续情形，$F_X(x)$ 有导函数 $f_X(x)$. 两种情形下的停止损失保费都可以由下式给出：

$$\pi_X(d) = \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{x>d}(x-d)f_X(x) & (\text{离散情形}) \\ \displaystyle\int_d^{\infty}(x-d)f_X(x)dx & (\text{连续情形}) \end{array} \right\} = \int_d^{\infty}[1-F_X(x)]dx. \tag{1.34}$$

离散情形下的图示"证明"见图 1.1. 等式 (1.34) 的右边，即由曲线 $F_X(x)$、通过 1 处的水平线和过 d 处的垂直线所围住的阴影部分的面积，被细分为高 $f_X(x)$、宽 $x-d$ 的长方格. 我们看到阴影部分的总面积等于 (1.34) 的左边.

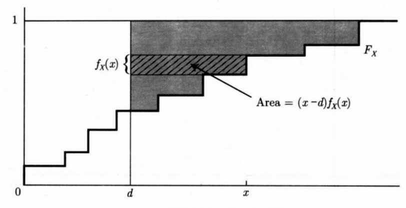


图 1.1 (1.34) 式在离散分布情形下的图形推导

对于连续情形，通过考虑其高度无限小的长方格，通过取极限用同样的方法可以证明. 为证明这一点，由分部积分得

$$\begin{aligned} E[(X-d)_+] &= \int_d^{\infty}(x-d)f_X(x)dx \\ &= -(x-d)[1-F_X(x)]\Big|_d^{\infty} + \int_d^{\infty}[1-F_X(x)]dx. \end{aligned} \tag{1.35}$$

为能够使得等式右边各项有限，$f_X(x)$ 不定积分 $F_X(x)+C$ 的唯一选择是 $F_X(x)-1$. 倒数第二项当 $x\to\infty$ 时趋于 0, 证明如下：因为 $E[X]<\infty$, 积分 $\int_0^{\infty} xf_X(x)dx$ 收敛，所以"尾"趋于 0, 因此

$$x[1-F_X(x)] = x\int_x^{\infty} f_X(t)dt \leqslant \int_x^{\infty} tf_X(t)dt \downarrow 0 \quad (\text{当 } x\to\infty \text{ 时}). \tag{1.36}$$

由 (1.34) 得

$$\pi'_X(d) = F_X(d)-1. \tag{1.37}$$

因为 $F_X(x)=\Pr[X\leqslant x]$, 所以每个分布函数都是右连续的. 因此，(1.37) 中的导数是右导数. 由 (1.37), 我们可以看到 $\pi_X(d)$ 是一个连续函数，并且只要 $F_X(d)<1$, 它于 d 点就是严格递减的. 事实上，当自留额增加时，停止损失保费很明显也随之减少. 如果 X 是非负的，则 $\pi_X(0)=E[X]$, 同时 $\pi_X(\infty)=0$ 总成立. 对这些性质的分析见图 1.2.

在下一个定理中，我们将证明停止损失保险使自留风险的方差达到最小.

定理 1.4.1(停止损失再保险的最优性) 用 $I(X)$ 记当损失为 X $(X\geqslant 0)$ 时，某再保险合同约定的理赔支付. 假设 $0\leqslant I(x)\leqslant x$ 对于任意 $x\geqslant 0$ 成立，则

$$E[I(X)] = E[(X-d)_+] \Rightarrow \text{Var}[X-I(X)] \geqslant \text{Var}[X-(X-d)_+]. \tag{1.38}$$

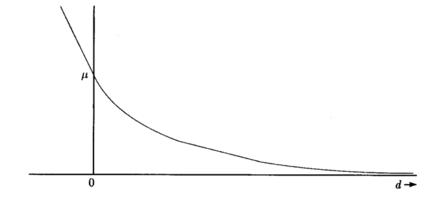


图 1.2　停止损失保费 $\pi_X(d)$

证明　注意到，对每一 $I(\cdot)$，我们总能够找到一个自留额 d 使得等式两边的期望相等 (见 (1.37) 后面的讨论)．我们将自留风险写成如下形式：

$$V(X) = X - I(X) \quad 和 \quad W(X) = X - (X-d)_+. \tag{1.39}$$

因为 $E[V(X)] = E[W(X)]$，所以只需证明

$$E[\{V(X)-d\}^2] \geqslant E[\{W(X)-d\}^2]. \tag{1.40}$$

上式成立的一个充分条件是 $|V(X)-d| \geqslant |W(X)-d|$ 以概率 1 成立．当 $X \geqslant d$ 时这是显然的，因为此时 $W(X) \equiv d$．当 $X < d$ 时，我们有 $W(X) \equiv X$，于是

$$V(X) - d = X - d - I(X) \leqslant X - d = W(X) - d < 0. \tag{1.41}$$

证毕．　∇

如前所述，这个定理可以推广：用风险排序理论，我们可以证明，停止损失保险不仅使自留风险的方差达最小，同时还使被保险人的期望效用达到最大 (见第 10 章)．

在以上的定理中，停止损失再保险与其它类型保险 $I(X)$ 具有相同的期望理赔和保费是关键的．既然再保险公司资本在停止损失保险下的方差大于在其它的类型保险下的方差，而再保险公司无一例外地，至少也是有些厌恶风险的，所以在实践中再保险公司对停止损失再保险收取更高的保费．

例 1.4.2([♠] 比例再保险的最优性)　为了说明保费不依赖于再保险类型条件的重要性，我们考虑一个相关问题：假设保险人收取保费 $(1+\theta)E[X]$，正寻求最有利的再保险 $I(X)$ 满足 $0 \leqslant I(X) \leqslant X$，且自留风险的方差给定如下：

$$\mathrm{Var}[X - I(X)] = V. \tag{1.42}$$

在自己财务状况不稳定是事先确定的假设之下，保险公司希望最大化其期望利润. 我们用两种方法计算再保险公司收取的再保费. 第一种情形 (A), 再保险公司按保险人原保险合同条款收取相同的再保费，因此，再保费等于 $(1+\lambda)E[I(X)]$. 第二种情形 (B), 再保险公司根据方差原则决定再保费，这就意味着再保险公司所收取的保费等于期望值加上 $I(X)$ 方差 α 倍的附加保费. 这样，保险人就可以确定自己的期望利润，该利润等于所收的保费减去自留风险期望值以及再保险保费，具体形式如下：

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}: \quad & (1+\theta)E[X]-E[X-I(X)]-(1+\lambda)E[I(X)] \\
&=\theta E[X]-\lambda E[I(X)]; \\
\mathrm{B}: \quad & (1+\theta)E[X]-E[X-I(X)]-(E[I(X)]+\alpha \mathrm{Var}[I(X)]) \\
&=\theta E[X]-\alpha \mathrm{Var}[I(X)].
\end{aligned} \tag{1.43}$$

正如我们所见，两种情形下保险人的期望利润都等于原合同期望利润 $\theta E[X]$ 减去再保险公司的期望利润. 显然，我们必须使再保险公司的期望利润达到最小. 因此，产生了下面的最小化问题：

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}: \quad & \min E[I(X)] \ \text{且使得}\ \mathrm{Var}[X-I(X)]=V; \\
\mathrm{B}: \quad & \min \mathrm{Var}[I(X)] \ \text{且使得}\ \mathrm{Var}[X-I(X)]=V.
\end{aligned} \tag{1.44}$$

问题 B 容易解决一些. 首先，

$$\mathrm{Var}[I(X)]=\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[I(X)-X]-2\mathrm{Cov}[X,X-I(X)]. \tag{1.45}$$

因为右边的前两项是固定的，所以左边的最小化等价于协方差项的最大化. 因为 X 和 $X-I(X)$ 的方差是给定的，所以可以取 $I(x)=\gamma+\beta x$ 使得 X 和 $X-I(X)$ 完全线性相关. 由 $0\leqslant I(x)\leqslant x$ 得 $\gamma=0$ 和 $0\leqslant\beta\leqslant 1$. 再由 (1.42) 得 $(1-\beta)^2=V/\mathrm{Var}[X]$. 因此，如果给定自留风险的方差，且再保险公司采用方差原则，则 比例再保险 $I(X)=\beta X$ 是最优的，其中 $\beta=1-\sqrt{V/\mathrm{Var}[X]}$.

对于情形 A, 我们利用定理 1.4.1. 通过对 d 求导，可以证明 (见习题 §1.4 第 3 题) $\mu(d)=E[X-(X-d)_+]$ 以及 $\sigma^2(d)=\mathrm{Var}[X-(X-d)_+]$ 是 d 的连续函数. 注意 $\mu(0)=\sigma^2(0)=0$, $\mu(\infty)=E[X]$ 和 $\sigma^2(\infty)=\mathrm{Var}[X]$.

在图 1.3 中，对于损失随机变量 X 和 $d\in[0,\infty)$, 我们画出点 $(\mu(d),\sigma^2(d))$ 对应的曲线. 由定理 1.4.1 知，其它再保险合同 $I(\cdot)$ 的均值和方差只能在 (μ,σ^2)- 平面的上述曲线之上，因为当均值相同时，其它再保险类型的方差至少不小于停止损失再保险的方差. 这也隐含这些点只能位于曲线的左边. 由此我们可以推断，类似于定理 1.4.1, 非比例停止损失保险是情形 A 的最优解. 这种情形下的停止损失再保险也是 Pareto 最优：其它任何的再保险解决方案都不可能同时使保险公司的方差更小，而且期望利润更高. ▽

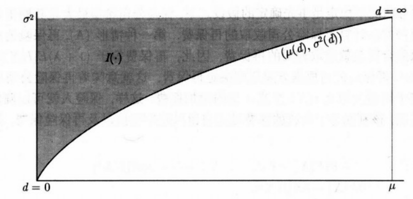


图 1.3　不同的再保险合同自留风险的均值和方差. 边界线为停止损失再保险, 其中 $d \in [0,\infty)$. 阴影部分为其它可行的再保险合同

§1.5　习　题

§1.2

1. 证明 Jensen 不等式：如果 $v(x)$ 是凸函数, 则 $E[v(X)] \geqslant v(E[X])$. 利用凸函数的定义：一个函数 $v(x)$ 是凸的当且仅当对任意 x_0, 存在一条直线 $l_0(x)=a_0x+b_0$ 使得 $l_0(x_0)=v(x_0)$, 并且对任意 x 有 $l_0(x) \leqslant v(x)$ (通常, $l_0(\cdot)$ 是 $v(\cdot)$ 的一条切线). 特别注意 $v(x)=x^2$ 情形.

2. 证明 Jensen 不等式的逆命题：如果 $E[v(X)] \geqslant v(E[X])$ 对任意随机变量 X 成立, 则 v 是凸的.

3. 证明：如果 $E[v(X)] = v(E[X])$ 对任意随机变量 X 成立, 则 v 是线性的.

4. 一个决策者使用效用函数 $u(x)=\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$. 他面临两个选择：用他现有的全部财富 w 交换随机额 X 或 Y. X 和 Y 的概率分布如下：

x	$\Pr[X=x]$
400	0.5
900	0.5

和

y	$\Pr[Y=y]$
100	0.6
1600	0.4

证明该决策者偏好 X 甚于 Y, 并确定 w 的取值范围使得他拒绝做任何交换. 你能够想象出这样的效用函数使得该决策者偏好 Y 甚于 X?

5. 证明对厌恶风险的保险人, $P^- \geqslant E[X]$.

6. 一个保险人承保一个风险 X, 收取保费后, 他拥有财富 $w=100$. 如果他使用的效用函数为 $u(w)=\log(w)$, 且 $\Pr[X=0]=\Pr[X=36]=0.5$, 那么为了让再保险人承担所有的风险, 该保险人乐意支付给再保险人的最大保费是多少？不仅要确定精确值, 同时也给出例 1.2.4 中 (1.18) 的近似值.

7. 在上题中, 如果再保险人的最小保费为 19, 使用与保险人相同的效用函数，试确定再保险人的财富 W.

8. 试描述具有以下风险行为个体的效用函数：在一公平赌博中，当他赢了 1 元以后，他对问题“加倍赌注或退出”的回答是“加倍”；当再次赢了之后，他犹豫很长时间才同意“加倍”；他第 3 次的回答是“退出”.

§1.3

1. 证明 (1.19) 中的各型效用函数都有非负、递减的边际效用，且其风险厌恶系数可以写成形式 $r(w) = (\gamma + \beta w)^{-1}$.

2. 证明平方效用函数的风险厌恶系数随拥有的财富递增. 验证 (1.28)~(1.30)，并证明由 (1.30) 给出的 $P(w)$ 满足 $P'(w) > 0$.

3. 对指数效用函数，证明 P^- 满足 (1.20)，且 (1.10) 的解 P^+ 具有 (1.20) 相同的表达式.

4. 证明：当风险厌恶系数 α 趋于 0 时，(1.20) 中的指数保费单调减趋于纯保费.

5. 证明：如果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 且 $u(\cdot)$ 是指数型，则例 1.2.4 中的近似是精确的.

6. 利用参数 $\alpha = 0.001$ 的指数效用函数，对于风险变量 $X \sim N(400, 25\,000)$ 和 $Y \sim N(420, 20\,000)$，确定哪一个保费较高，并给出 α 的取值范围使得前者的保费较高.

7. 假定 $u(w)$ 的边际效用与 $1/w$ 成比例，即对某个 $k > 0$ 和任意 $w > 0$，有 $u'(w) = k/w$，求 $u(w)$. 在例 1.2.1 圣彼得堡悖论中利用这个效用函数，试确定价格 P 使得参与游戏是值得的.

8. 一个保险人使用指数效用函数，以保费 P 承保服从 $N(1000, 100^2)$ 分布的风险. 已知 $P \geqslant 1250$，求风险厌恶系数 α? 如果风险 X 的量纲为“元”，那么 α 的量纲是什么？

9. 一个风险 X 的均值为 $E[X] = \mu$，方差为 $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$. 已知对任意可能的 $\alpha > 0$，风险厌恶系数为 α 的指数效用函数对应的零效用 保费含有相对安全附加系数 $\frac{1}{2}\sigma^2\alpha/\mu$. 试确定 X 的分布？

10. 对于幂效用函数，令 $c \downarrow 0$ 可以导出何种效用函数？（考虑线性变换 $(w^c - 1)/c$.）

§1.4

1. 绘出以下分布的停止损失变换：

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < 2 \text{ 时}, \\ x/4, & \text{当 } 2 \leqslant x < 4 \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } 4 \leqslant x \text{ 时}. \end{cases}$$

2. 如果 $E[(S-d)_+] = \frac{1}{3}(1-d)^3$, $0 \leqslant d \leqslant 1$，试确定 S 的分布.

3. [♠] 对于问题 A 的优化，证明

$$\mu'(d) = 1 - F_X(d) \quad \text{和} \quad (\sigma^2)'(d) = 2[1 - F_X(d)][d - \mu(d)],$$

并验证这两项是非负的.

4. [♠] 如果在 (1.42) 中把“=”换成“⩽”，即视 V 为 A 、B 两情形下自留风险方差的上界，那么结论如何？

5. 对于一个均值为 μ，方差为 σ^2 的风险 X，其变异系数 $V[\cdot]$ 定义为 σ/μ. 通过比较停止损失再保险中自留风险 $W(X) = X - (X-d)_+$ 的方差与某个适当的比例再保险中自留风险的方差，证明 $V[W] \leqslant V[X]$. 利用等式：$\min\{X, d\} = \min\{\min\{X, t\}, d\}$, $d < t$，证明 $V[\min\{X, d\}]$ 关于 d 递增.

6. 设随机损失 $X \sim N(0,1)$, 考虑如下的保险: 当损失额为 x 且 $x \geqslant d$ 时, 理赔额 $I(x) = x$; 否则 $I(x) = 0$, 其中 $d > 0$ 是某个给定的数. 证明这类保险的纯保费为标准正态分布的概率密度函数 $\phi(x)$, 并把该保费与自留额为 d 的停止损失纯保费作对比.



第2章　个体风险模型

§2.1　引　言

本章我们主要讨论保险人风险组合的总理赔额 S 的分布函数. 我们不仅仅要确定保险人随机资产的均值和方差, 还要确定其理赔额超过某一给定门限值的概率. 为了能够应用前一章所提到的理论, 我们也需要一个关于总理赔额 S 的模型. 为了确定在险价值 (VaR), 如水平 99.9%, 我们需要对分布函数的逆函数作出好的近似, 尤其是后尾部. 本章我们提出的模型是针对个别 (通常是不同的) 保单. 如同在非寿险数学中那样, 我们不考虑货币的时间价值. 然而这对于残疾险和长期健康险是非常重要的, 基于这个原因, 我们有时把这两种类型的险种看作为寿险.

在保险实务中, 风险通常不能由纯离散的或纯连续的随机变量来刻画. 例如, 在责任险中, 理赔额有很大的取值范围, 每一种理赔额都对应一个非常小的发生概率. 有两种例外情况不容忽视: 无理赔 (理赔额为 0) 发生的概率很大, 以及理赔额等于最大保险金额的概率 (即损失超过某一门限值的概率). 为求这样的混合随机变量的均值, 我们用黎曼 – 斯蒂尔切斯积分 (Riemann-Stieltjes) 积分, 而不必去深究其数学原理. 能够产生这种类型随机变量的一个简单而灵活的模型是混合模型. 该模型取决于事件结果: 对于 0 理赔和最大额理赔, 采用离散分布, 其它情况用连续分布. 后面, 我们将给出每个保单理赔额的混合模型示例.

假设一项业务中的风险是独立的随机变量, 那么总风险的分布可以用卷积得到. 然而这样做非常麻烦, 因此需要其它更简单的方法. 方法之一就是利用矩母函数 (mgf) 或利用相关的一些变换, 如特征函数、概率母函数 (pgf) 、累积量母函数 (cgf). 有时需要通过辨认一个卷积的矩母函数来识别其对应的分布函数.

一种完全不同的方法是对 S 的分布作出近似. 如果 S 是 "很多" 随机变量的和, 那么根据中心极限定理, 我们可以用与 S 有相同均值和方差的正态分布去近似 S 的分布. 我们也将指出, 这种近似在保险实践中不能令人满意, 尾概率的近似误差偏大. 转化为数学语言即是: S 的三阶中心矩通常大于 0, 而正态分布的三阶中心矩等于 0. 因为在保险实践中, 尾概率对应于大额理赔的概率, 所以需要 S 分布的更为精细的近似. 我们给出一种基于平移伽玛近似和另一种正态功效 (NP) 近似. 这两种近似的效果是可以比较的. 后者可以由标准正态分布表直接得出, 而前者可以由计算机经过数值计算得到, 或 (如果需要) 也可以由同样的 $N(0,1)$ 表近似得到.

另一种近似个体风险模型的办法是用下一章中的聚合风险模型.

§ 2.2　混合分布和风险

本节我们讨论保险风险的一些实例, 即一份保单的理赔额. 由于纯离散随机变量和纯连续随机变量都不能描述这种风险, 所以我们必须先拓展分布函数类.

根据概率理论, 我们知道每一个分布函数 $F(\cdot)$ 都满足

$$\begin{aligned}&F(-\infty)=0,\quad F(+\infty)=1;\\&F(\cdot)\text{ 单调增};\\&F(\cdot)\text{ 右连续}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

如果 $F(\cdot)$ 是一个阶梯函数, 即具有常数部分和可数个不连续点的函数, 则 $F(\cdot)$ 以及具有这种分布函数的随机变量 X 称作是*离散的*. 相应的概率 (质量) 函数代表 x 处的跨度, 所以

$$f(x)=F(x)-F(x-0)=\Pr[X=x],\quad \forall x\in(-\infty,\infty).\tag{2.2}$$

对于所有的 x, 我们都有 $f(x)\geqslant 0$ 和 $\sum_x f(x)=1$, 其中求和是对那些满足 $f(x)>0$ 的所有 x 求和.

一种特殊情形是 $F(x)$ 是*绝对连续的*. 这意味着如果 $f(x)=F'(x)$, 则有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt.\tag{2.3}$$

在这种情况下, $f(x)$ 称为概率密度函数. 同样 $f(x)\geqslant 0$, 且 $\int f(x)dx=1$. 注意, 正如在数理统计中常常出现的那样, 这种没有积分限的记号代表 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 上的定积分, 而不是任意一个不定积分, 即以 $f(x)$ 为其导函数的任一函数.

在统计学中, 所有的随机变量要么为离散型要么为连续型, 几乎无一例外. 然而保险领域却不总是这样. 许多被用来模拟保险理赔支付的分布函数有连续增长的部分, 同时也有离散的、正的跳跃部分. 设 Z 代表某个保单的理赔支付, 则有三种情况:

1. 保单合同无理赔, 因此 $Z=0$.
2. 保单合同的索赔数额大于最大的保险金额 M, 则 $Z=M$.
3. 保单合同产生正常的索赔数额, 则 $0<Z<M$.

显然, Z 的分布函数在 0 和 M 处各有一个跳越. 对于中间部分, 我们可以用一个离散分布, 因为理赔支付是货币单位的某些整数倍. 这样会有很多可能的理赔支付额, 其各自的发生概率都很小, 因此用一个连续分布函数会更方便. 在这种情形下, 分布函数既不是完全离散, 也不是完全连续. 图 2.2 绘出了连续 / 离散分布函数混合分布, 也见习题 §1.4 第 1 题.

下面的两阶段模型使得我们能够构造这样一个随机变量，该变量的分布为离散和连续分布的混合分布．设 I 为示性随机变量，取值为 0 和 1，其中 $I=1$ 表示某个事件发生．假设事件发生的概率为 $q=\Pr[I=1]$, $0\leqslant q\leqslant 1$. 若 $I=1$, 则索赔 Z 与 X 分布相同；若 $I=0$, 则 Z 与 Y 分布相同，即

$$Z = IX + (1-I)Y. \tag{2.4}$$

如果 $I=1$, 则 Z 可用 X 替代；如果 $I=0$, 则 Z 可用 Y 替代．注意我们可以假设 X, Y 与 I 相互独立，因为给定 $I=0$, X 的值是无关紧要的，所以可以认为 $\Pr[X\leqslant x|I=0]=\Pr[X\leqslant x|I=1]$. 因此， Z 的分布函数可以写成

$$\begin{aligned}
F(z) &= \Pr[Z\leqslant z] \\
&= \Pr[Z\leqslant z,\ I=1]+\Pr[Z\leqslant z,\ I=0] \\
&= \Pr[X\leqslant z,\ I=1]+\Pr[Y\leqslant z,\ I=0] \\
&= q\Pr[X\leqslant z]+(1-q)\Pr[Y\leqslant z].
\end{aligned} \tag{2.5}$$

现在，令 X 为一个离散随机变量， Y 为一个连续随机变量．由 (2.5) 得

$$F(z)-F(z-0)=q\Pr[X=z]$$

和

$$F'(z)=(1-q)\frac{d}{dz}\Pr[Y\leqslant z]. \tag{2.6}$$

这种构造法产生的分布函数 $F(z)$ 在使得 $\Pr[X=z]>0$ 的 z 处有跳跃，但 $F(z)$ 不是一个阶梯函数，因为在 Y 的值域上 $F'(z)>0$.

为了计算 Z 的矩、矩母函数 $E[e^{tZ}]$ 和停止损失保费 $E[(Z-d)_+]$, 我们必须计算 Z 的函数的期望．为此，我们用条件期望的平滑公式：

$$E[W]=E[E[W|V]]. \tag{2.7}$$

取公式中的 $W=g(Z)$, 并用 I 代替 V, 其中 $g(\cdot)$ 是某个函数．再引入 $h(i)=E[g(Z)|I=i]$, 我们得到

$$\begin{aligned}
E[g(Z)] &= E[E[g(Z)|I]]=E[h(I)]=qh(1)+(1-q)h(0) \\
&= qE[g(Z)|I=1]+(1-q)E[g(Z)|I=0] \\
&= qE[g(X)|I=1]+(1-q)E[g(Y)|I=0] \\
&= qE[g(X)]+(1-q)E[g(Y)] \\
&= q\sum_z g(z)\Pr[X=z]+(1-q)\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\frac{d}{dz}\Pr[Y\leqslant z]dz \\
&= \sum_z g(z)[F(z)-F(z-0)]+\int_{-\infty}^{\infty} g(z)F'(z)dz.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

这里 $F(z-0)$ 表示左极限，同时利用分布函数是右连续的，有 $F(z+0)=F(z)$.

注 2.2.1(黎曼 - 斯蒂尔切斯积分)　注意到式 (2.8) 的结果是由一个求和项和一个通常黎曼积分组成，它可以写为如下的一个黎曼 - 斯蒂尔切斯积分：

$$E[g(Z)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(z)dF(z). \tag{2.9}$$

微分 $dF(z) = F_Z(z) - F_Z(z-dz)$ 表示于 z 点的概率，即若有概率存在，则该微分表示分布函数在 z 点的跳跃高度；若在 z 处分布函数没有跳跃，则该微分等于 $F'(z)dz$. 这里，dz 表示一个正的无穷小量. 它的主要特征是正值，但小于任意一个正数. 注意分布函数 $F(z)=\Pr[Z \leqslant z]$ 是右连续的. 在寿险数学中，黎曼 - 斯蒂尔切斯积分，也称作广义黎曼积分，引发出使用被积函数的哪种取值 (左极限，右极限或被积函数真实值) 问题. 我们通过只考虑连续的被积函数来回避这一问题. ▽

注 2.2.2(混合随机变量与分布)　可以如下概括上述内容：当考虑如 (2.10) 所示混合随机变量时，就会有一个相应的混合连续 / 离散分布函数 $F_Z(z)=\Pr[Z \leqslant z]$,

$$Z = IX + (1-I)Y, \tag{2.10}$$

其中 X 为一个离散随机变量，Y 为一个连续随机变量，I 是独立于 X 和 Y 的 Bernoulli (q) 随机变量. Z 的分布函数是 X 和 Y 的分布函数的混合 (凸组合), 见 (2.5):

$$F_Z(z) = qF_X(z) + (1-q)F_Y(z). \tag{2.11}$$

为了求得 $g(Z)$ 的期望，我们可以由 $E[g(X)]$ 和 $E[g(Y)]$ 的混合得到，见 (2.8):

$$E[g(Z)] = qE[g(X)] + (1-q)E[g(Y)]. \tag{2.12}$$

值得注意的是，凸组合 $T = qX + (1-q)Y$ 的分布函数并不都有形式 (2.11), 尽管 (2.12) 对于 $g(z)=z$ 是成立的，见 §2.2 第 8 题和第 9 题. ▽

例 2.2.3(自行车被盗险)　考虑一种对自行车被盗有保障的保单：在保险事故“自行车被盗”发生时，赔付 b 给被保险人，同时保险人的保险责任终止. 显然，正如大多数寿险保单一样，这种保单的赔付次数为 0 或 1, 且事先知道赔付额. 假设保险事故发生的概率为 q, 以 $X = Ib$ 表示理赔支付，其中 I 为 Bernoulli(q) 示性随机变量，$I=1$ 表示自行车被盗，$I=0$ 表示未被盗. 类似 (2.4), 我们可以把 X 重新表示为 $X = Ib + (1-I)0$. X 的分布和矩可以由 I 的分布和矩得到：

$$\begin{aligned}
&\Pr[X=b] = \Pr[I=1] = q; \\
&\Pr[X=0] = \Pr[I=0] = 1-q; \\
&E[X] = bE[I] = bq; \quad \mathrm{Var}[X] = b^2\mathrm{Var}[I] = b^2q(1-q).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

现在, 假设自行车未锁而被盗, 保险人赔付一半. 在荷兰, 许多自行车被盗保单不区分这种理赔数额的差别. 保险人在理赔调查时, 只要求被保险人在索赔时呈交所有的原始关键材料. 于是 $X = IB$, 其中 B 代表随机赔付额. 假设理赔支付 $X = 400$ 和 $X = 200$ 的概率分别为 0.05 和 0.15, 则有

$$\Pr[I = 1,\ B = 400] = 0.05; \quad \Pr[I = 1,\ B = 200] = 0.15. \tag{2.14}$$

因此, $\Pr[I = 1] = 0.2$, $\Pr[I = 0] = 0.8$, 并且

$$\Pr[B = 400 | I = 1] = \frac{\Pr[B = 400,\ I = 1]}{\Pr[I = 1]} = 0.25. \tag{2.15}$$

这表示在自行车被盗的情况下, 在被盗时自行车是锁着的概率. ▽

例 2.2.4(有索赔, 且索赔额服从指数分布) 假设风险 X 有如下分布:

1. $\Pr[X = 0] = \frac{1}{2}$;
2. $\Pr[X \in [x, x + dx)] = \frac{1}{2}\beta e^{-\beta x}dx, \quad \beta = 0.1,\ x > 0$,

这里 dx 表示一个正的无穷小量. X 的均值是多少? 对于风险厌恶系数为 $\alpha = 0.01$ 且具有指数效用函数的人, 愿意为风险 X 支付的最大保费为多少?

随机变量 X 不是连续型的, 因为 X 的分布函数在 0 点有一个跳跃; X 也不是离散的, 因为其分布函数不是一个阶梯函数, 其导函数 $\Pr[x \leqslant X < x + dx]/dx$ 当 $x > 0$ 时为正. 在计算 X 的均值时, 可以把分布函数有跳跃的部分单独处理, 见 (2.9). 由此, 我们有

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) = 0\, dF_X(0) + \int_0^{\infty} x F_X'(x) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x\beta e^{-\beta x} dx = 5. \end{aligned} \tag{2.16}$$

如果被保险人使用的是参数为 $\alpha = 0.01$ 的指数效用函数, 则由 (1.21) 得到最大保费 P^+:

$$\begin{aligned} P^+ &= \frac{1}{\alpha}\log(m_X(\alpha)) = \frac{1}{\alpha}\log\left(e^0 dF_X(0) + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{\alpha x}\beta e^{-\beta x} dx\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\beta - \alpha}\right) = 100\log\left(\frac{19}{18}\right) \approx 5.4. \end{aligned} \tag{2.17}$$

把 X 写成 (2.10) 形式, 也可以得到同样的结果. ▽

例 2.2.5(有最大保险金额的责任险) 考虑承包责任损失为 S 的保单. 我们希望得到这个保单理赔支付 X 的均值、方差和分布, 其中免赔额为 100, 最大理赔支付为 1000. 换言之, 如果 $S \leqslant 100$, 则 $X = 0$; 如果 $S \geqslant 1100$, 则 $X = 1000$; 否则, $X = S - 100$. 发生理赔 ($S > 100$) 的概率是 10%, 发生大额损失 ($S \geqslant 1100$) 的概

率是 2%. 给定 $100 < S < 1100$, S 服从 $U(100,1100)$ 分布, 这里 $U(a,b)$ 表示区间 (a,b) 上的均匀分布. 同样的, X 可以表示成 $X = IB$, 其中 I 表示理赔支付次数 (0 或 1), B 代表理赔支付. 因此,

$$\begin{aligned} &\Pr[B = 1000|I = 1] = 0.2; \\ &\Pr[B \in (x, x + dx)|I = 1] = c\,dx, \quad 0 < x < 1000. \end{aligned} \tag{2.18}$$

后者在 $x \in (0, 1000)$ 上积分等于 0.8, 于是 $c = 0.0008$.

给定 $I = 1$, B 的条件分布函数既不是离散型的, 也不是连续型的. 在图 2.1 中, 我们尝试画出给定 $I = 1$, B 的 "概率密度函数". 在水平轴 1000 处, 我们用水平轴无限小的宽度、垂直轴无限长的高度, 并且其面积为 0.2 的区域表示这一点的概率堆积. 实际上, 我们已画出 $f(\cdot)$, 其中 $f(x) = 0.0008$, $x \in (0, 1000)$; $f(x) = 0.2/\varepsilon$, $x \in (1000, 1000 + \varepsilon)$, 其中 ε 为充分小的正数.

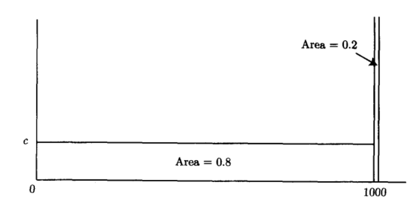


图 2.1 给定 $I = 1, B$ 的 "概率密度函数"

为求 X 的分布函数 F, 我们有

$$\begin{aligned} F(x) &= \Pr[X \leqslant x] = \Pr[IB \leqslant x] \\ &= \Pr[IB \leqslant x,\ I = 0] + \Pr[IB \leqslant x,\ I = 1] \\ &= \Pr[IB \leqslant x|I = 0]\Pr[I = 0] + \Pr[IB \leqslant x|I = 1]\Pr[I = 1], \end{aligned} \tag{2.19}$$

由此得

$$F(x) = \begin{cases} 0 \times 0.9 + 0 \times 0.1 = 0, & x < 0, \\ 1 \times 0.9 + 1 \times 0.1 = 1, & x \geqslant 1000, \\ 1 \times 0.9 + c\,x \times 0.1, & 0 \leqslant x < 1000. \end{cases} \tag{2.20}$$

图 2.2 绘出了 X 的分布函数 F. F 的微分 ("密度") 形式为

$$dF(x) = \begin{cases} 0.9, & x = 0, \\ 0.02, & x = 1000, \\ 0, & x < 0 \text{ 或 } x > 1000, \\ 0.00008\, dx, & 0 < x < 1000. \end{cases} \tag{2.21}$$

X 的矩可以由这个微分算出. ∇

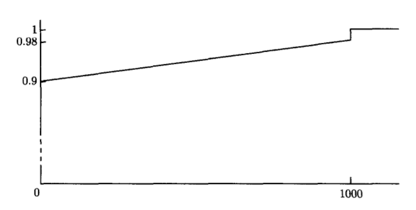


图 2.2 例 2.2.5 中 X 的分布函数 F

利用如下众所周知的方差分解准则 (参考 (2.7)), 形如 IB 的风险方差可以通过给定 I, B 的条件分布来计算:

$$\text{Var}[W] = \text{Var}[E[W|V]] + E[\text{Var}[W|V]]. \tag{2.22}$$

注意到给定 $I=0$, B 的条件分布无关紧要. 为方便, 不妨设此条件分布与给定 $I=1$, B 的条件分布相同, 也即假定 I 和 B 相互独立. 记 $q = \Pr[I=1]$, $\mu = E[B]$ 和 $\sigma^2 = \text{Var}[B]$, 则我们有 $E[X|I=1] = \mu$ 和 $E[X|I=0] = 0$. 所以, $E[X|I=i] = \mu i$, $i = 0, 1$, 类似地也有 $\text{Var}[X|I=i] = \sigma^2 i$. 因此

$$E[X|I] \equiv \mu I \quad \text{和} \quad \text{Var}[X|I] \equiv \sigma^2 I, \tag{2.23}$$

由此得

$$\begin{aligned} E[X] &= E[E[X|I]] = E[\mu I] = \mu q; \\ \text{Var}[X] &= \text{Var}[E[X|I]] + E[\text{Var}[X|I]] = \text{Var}[\mu I] + E[\sigma^2 I] \\ &= \mu^2 q(1-q) + \sigma^2 q. \end{aligned} \tag{2.24}$$

§2.3 卷　积

在个体风险模型中，我们感兴趣的是多个保单总理赔 S 的分布：

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \tag{2.25}$$

其中 X_i 表示保单 i 的理赔额. 假定风险 X_i $(i = 1, \cdots, n)$ 是相互独立的. 如果这种独立性对某些风险不成立，例如同一建筑中不同楼层的火灾保险保单，那么这些风险应当合在一起作为 (2.25) 中的一项.

卷积运算是通过两个独立随机变量 X 和 Y 的分布函数按如下方式来计算 $X+Y$ 的分布函数：

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(s) &= \Pr[X + Y \leqslant s] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr[X + Y \leqslant s | X = x] dF_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr[Y \leqslant s - x | X = x] dF_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Pr[Y \leqslant s - x] dF_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(s - x) dF_X(x) =: F_X * F_Y(s).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

分布函数 $F_X * F_Y(\cdot)$ 称为 $F_X(\cdot)$ 和 $F_Y(\cdot)$ 的卷积. 对于概率密度和概率函数，我们有同样的记号. 如果 X 和 Y 是离散型的，则有

$$F_X * F_Y(s) = \sum_x F_Y(s - x) f_X(x)$$

和

$$f_X * f_Y(s) = \sum_x f_Y(s - x) f_X(x), \tag{2.27}$$

其中求和是取遍所有使得 $f_X(x) > 0$ 的 x. 如果 X 和 Y 是连续型的，则

$$F_X * F_Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(s - x) f_X(x) dx. \tag{2.28}$$

对积分号下求导得

$$f_X * f_Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(s - x) f_X(x) dx. \tag{2.29}$$

注意卷积运算并不局限于两个分布函数. 为求 $X + Y + Z$ 的分布函数，我们在做卷积运算时所采用的卷积次序无关紧要. 因此，我们有

$$(F_X * F_Y) * F_Z \equiv F_X * (F_Y * F_Z) \equiv F_X * F_Y * F_Z. \tag{2.30}$$

n 个独立同分布的随机变量之和的分布函数是共同边际分布 F 的 n 重卷积，记为

$$F * F * \cdots * F =: F^{*n}. \tag{2.31}$$

例 2.3.1(两个均匀分布的卷积) 设 $X \sim U(0,1)$ 和 $Y \sim U(0,2)$ 相互独立，求 $X+Y$ 的分布函数.

为表达方便，我们引进示性函数. 一个集合 A 的示性函数定义为

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ 当 } x \in A \text{ 时}, \\ 0, \text{ 当 } x \notin A \text{ 时}. \end{cases} \tag{2.32}$$

示性函数可以给定义于不同区间上有不同取值的函数提供非常简洁的表达. 对任意 x, X 的分布函数可以表达为

$$F_X(x) = xI_{[0,1)}(x) + I_{[1,\infty)}(x), \tag{2.33}$$

又 $F_Y'(y) = \frac{1}{2}I_{[0,2)}(y), \forall y$, 进而有

$$dF_Y(y) = \frac{1}{2}I_{[0,2)}(y)dy. \tag{2.34}$$

对 $Y+X$ 而不是 $X+Y$ 应用卷积公式 (2.26) 得

$$F_{Y+X}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(s-y)dF_Y(y) = \int_0^2 F_X(s-y)\frac{1}{2}dy, \quad s \geqslant 0. \tag{2.35}$$

感兴趣的区间是 $0 \leqslant s < 3$. 把该区间分为区间 $[0,1)$, $[1,2)$ 和 $[2,3)$ 得

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(s) &= \left\{\int_0^s (s-y)\frac{1}{2}dy\right\} I_{[0,1)}(s) \\ &\quad + \left\{\int_0^{s-1} \frac{1}{2}dy + \int_{s-1}^{s} (s-y)\frac{1}{2}dy\right\} I_{[1,2)}(s) \\ &\quad + \left\{\int_0^{s-1} \frac{1}{2}dy + \int_{s-1}^{2} (s-y)\frac{1}{2}dy\right\} I_{[2,3)}(s) \\ &= \frac{1}{4}s^2 I_{[0,1)}(s) + \frac{1}{4}(2s-1)I_{[1,2)}(s) + [1-\frac{1}{4}(3-s)^2]I_{[2,3)}(s). \end{aligned} \tag{2.36}$$

注意 $X+Y$ 是关于 $s=1.5$ 对称. 尽管上面问题可以利用图形基于面积来计算概率 (见习题 §2.3 第 5 题), 但是上面的推导很好地说明了即使在简单均匀分布情形求卷积计算也是繁杂的. ∇

例 2.3.2(离散分布的卷积) 设

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/4, & x=0, \\ 1/2, & x=1, \\ 1/4, & x=2, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1/2, & x=0, \\ 1/2, & x=2, \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} 1/4, & x=0, \\ 1/2, & x=2, \\ 1/4, & x=4. \end{cases}$$

以 f_{1+2} 表示 f_1 和 f_2 的卷积, f_{1+2+3} 表示 f_1, f_2 和 f_3 的卷积. 为求 F_{1+2+3}, 我们需要计算出表 2.1 中的各个数值. 可见, 在离散情形求卷积运算也是繁杂的, 并且 $f_i(x) \neq 0$ 的点越多, 计算的复杂度越高. ▽

表 2.1　例 2.3.2 中的卷积计算

x	$f_1(x)$	*	$f_2(x)$	=	$f_{1+2}(x)$	*	$f_3(x)$	=	$f_{1+2+3}(x)$	⇒	$F_{1+2+3}(x)$
0	1/4		1/2		1/8		1/4		1/32		1/32
1	1/2		0		2/8		0		2/32		3/32
2	1/4		1/2		2/8		1/2		4/32		7/32
3	0		0		2/8		0		6/32		13/32
4	0		0		1/8		1/4		6/32		19/32
5	0		0		0		0		6/32		25/32
6	0		0		0		0		4/32		29/32
7	0		0		0		0		2/32		31/32
8	0		0		0		0		1/32		32/32

例 2.3.3(iid 均匀分布的卷积)　设 $X_i, i=1,2,\cdots,n$, 相互独立, 皆服从 $U(0,1)$ 分布. 利用卷积公式和归纳法, 可以证明对任意 $x>0$, $S=X_1+\cdots+X_n$ 的概率密度为

$$f_S(x)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{h=0}^{[x]}\binom{n}{h}(-1)^h(x-h)^{n-1}, \tag{2.37}$$

其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分. 见习题 §2.3 第 4 题. ▽

例 2.3.4(泊松分布的卷积)　设 $X\sim \text{Poisson}(\lambda)$ 和 $Y\sim\text{Poisson}(\mu)$ 相互独立. 由 (2.27), 我们有

$$\begin{aligned}f_{X+Y}(s)&=\sum_{x=0}^{s}f_Y(s-x)f_X(x)=\frac{e^{-\mu-\lambda}}{s!}\sum_{x=0}^{s}\binom{s}{x}\mu^{s-x}\lambda^x\\&=e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^s}{s!},\quad s=0,1,2,\cdots,\end{aligned} \tag{2.38}$$

其中最后等式利用二项式展开公式. 因此, $X+Y$ 服从 $\text{Poisson}(\lambda+\mu)$ 分布. 习题 §2.4 第 2 题给出另一种不同的证法. ▽

§2.4　变　换

利用分布函数的变换有时可以较容易地确定独立随机变量和的分布. 矩母函

数 (mgf) 就是这种变换之一. 对一个非负随机变量 X, 其矩母函数定义为

$$m_X(t) = E\left[e^{tX}\right], \quad -\infty < t < h, \tag{2.39}$$

其中 h 为某个常数. 因为我们特别要用到矩母函数在 0 点附近的小区间里的取值, 所以要求 $h > 0$. 如果 X 和 Y 相互独立, 则

$$m_{X+Y}(t) = E\left[e^{t(X+Y)}\right] = E\left[e^{tX}\right]E\left[e^{tY}\right] = m_X(t)m_Y(t). \tag{2.40}$$

即分布函数的卷积对应于矩母函数的简单乘积. 注意到矩母函数变换是一一对应的, 所以每个分布函数恰对应唯一的矩母函数, 而且一个分布函数序列极限的矩母函数等于对应的矩母函数序列的极限. 见习题 §2.4 第 12 题和第 13 题.

对于某些具有重尾的分布, 如柯西分布, 其矩母函数不存在. 但是特征函数总是存在的. 特征函数定义为

$$\phi_X(t) = E\left[e^{itX}\right], \quad -\infty < t < \infty. \tag{2.41}$$

特征函数的一个不足之处是需要处理复数, 尽管经验告诉我们, 无论是实数 t 还是虚数 t, 我们得到的都是同样的结果. 例如, $e^{(it)^2} = e^{-t^2}$ 是 $N(0,2)$ 分布的特征函数, 其矩母函数为 e^{t^2}.

矩母函数正如其名称所表明的那样, 可以用来产生随机变量的各阶矩. 利用通常的 e^x 的展开式可以得到

$$m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E\left[X^k\right]t^k}{k!}, \tag{2.42}$$

所以 X 的 k 阶矩等于

$$E\left[X^k\right] = \left.\frac{d^k}{dt^k}m_X(t)\right|_{t=0}. \tag{2.43}$$

类似的技巧可用于特征函数.

概率母函数 (pgf) 仅用于取值为自然数的随机变量, 定义为

$$g_X(t) = E\left[t^X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \Pr[X = k]. \tag{2.44}$$

因此, (2.44) 中的概率 $\Pr[X = k]$ 作为概率母函数展开式中的系数. 若 $|t| \leqslant 1$, 则级数 (2.44) 总是收敛的.

累积量母函数 (cgf) 便于计算三阶中心矩, 其定义为

$$\kappa_X(t) = \log m_X(t). \tag{2.45}$$

对 (2.45) 求导三次并令 $t=0$, 可以得到 $\kappa_X(t)$ 关于 0 点的 Taylor 展开式的前几项 $\frac{t^k}{k!}$ $(k=1,2,3)$ 的系数分别为 $E[X]$, $\mathrm{Var}[X]$ 和 $E[(X-E[X])^3]$. 由这种方式得到的量是 X 的 **半不变量**, 记为 κ_k, $k=1,2,\cdots$. 另一种推导方法如下：记 $\mu_k=E\left[X^k\right]$, 并以 $O(t^k)$ 表示 t 的 k 次幂或高于 k 次幂的项，则有

$$m_X(t)=1+\mu_1 t+\frac{1}{2}\mu_2 t^2+\frac{1}{6}\mu_3 t^3+O(t^4), \tag{2.46}$$

再利用 $\log(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3+O(z^4)$, 可得

$$\begin{aligned}\log m_X(t) &= \log\left(1+\mu_1 t+\frac{1}{2}\mu_2 t^2+\frac{1}{6}\mu_3 t^3+O(t^4)\right)\\ &= \mu_1 t+\frac{1}{2}\mu_2 t^2+\frac{1}{6}\mu_3 t^3+O(t^4)\\ &\quad -\frac{1}{2}\left\{\mu_1^2 t^2+\mu_1\mu_2 t^3+O(t^4)\right\}\\ &\quad +\frac{1}{3}\left\{\mu_1^3 t^3+O(t^4)\right\}+O(t^4)\\ &= \mu_1 t+\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1^2)t^2+\frac{1}{6}(\mu_3-3\mu_1\mu_2+2\mu_1^3)t^3+O(t^4)\\ &= E[X]t+\mathrm{Var}[X]\frac{1}{2}t^2+E[(X-E[X])^3]\frac{1}{6}t^3+O(t^4).\end{aligned} \tag{2.47}$$

随机变量 X 的 **偏度** 定义为

$$\gamma_X=\frac{\kappa_3}{\sigma^3}=\frac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}, \tag{2.48}$$

其中 $\mu=E[X]$, $\sigma^2=\mathrm{Var}[X]$.

如果 $\gamma_X>0$, 那么 $X-\mu$ 往往有取较大值的趋势，因此其分布函数的右尾很重. 若偏度 $\gamma_X<0$, 则表明该分布函数的左尾很重. 如果 X 是对称的，则 $\gamma_X=0$. 但反过来，偏度为 0 并不能说明随机变量的分布是对称的，反例见习题.

累积量母函数、概率母函数、特征函数和矩母函数之间有如下的关系：

$$\kappa_X(t)=\log m_X(t);\quad g_X(t)=m_X(\log t);\quad \phi_X(t)=m_X(it). \tag{2.49}$$

§2.5 近　似

众所周知，用标准正态分布函数 Φ 去近似另一个分布函数的方法是中心极限定理 (CLT), 其最简单的形式如下.

定理 2.5.1(中心极限定理)　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，共同的均值为 μ, 方差为 $\sigma^2<\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\Pr\left[\sum_{i=1}^n X_i\leqslant n\mu+x\sigma\sqrt{n}\right]=\Phi(x). \tag{2.50}$$

证明 我们欲证明累积量母函数的收敛性. 令 $S^*=(X_1+\cdots+X_n-n\mu)/\sigma\sqrt{n}$, 则当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}\log m_{S^*}(t) &= -\frac{\sqrt{n}\mu t}{\sigma}+n\left\{\log m_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right\}\\ &= -\frac{\sqrt{n}\mu t}{\sigma}+n\left\{\mu\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2+O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3\right)\right\}\\ &= \frac{1}{2}t^2+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\end{aligned} \tag{2.51}$$

该式收敛于 $N(0,1)$ 分布的累积量母函数. ∇

这样, 我们就可以用下式来逼近 $S=X_1+\cdots+X_n$ 的分布函数:

$$F_S(s)\approx\Phi\left(s;\sum_{i=1}^{n}E[X_i],\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}[X_i]\right). \tag{2.52}$$

如果 n 足够大, 那么上面这种近似可以放心地使用. 正如在下面的典型例子中将要看到的那样, 我们很难对 "n 足够大" 定义一个标准.

例 2.5.2(产生正态随机数) 产生 $N(0,1)$ 随机数的一个快速、简单的方法是把 12 个 $(0,1)$ 区间上均匀分布的随机数加到一起, 然后减去 6. 这种方法不需要经过费时的对数运算或正态分布函数的反函数运算. 这种方法是基于 $n=12$ 的中心极限定理. 比较此分布函数和正态分布函数, 比如用 (2.37), 得到的最大偏差为 0.002. 因此, 在这个例子里, 用 CLT 给出的近似精度很好. 见习题 §2.4 第 5 题. ∇

例 2.5.3(两种不同的近似) 假设 1000 个男性年轻人购买了保险期间为一年的保单. 每个投保人在一年内死亡的概率为 0.001, 且死亡发生的理赔支付为 1. 我们要计算这批保单总的理赔支付至少为 4 的概率. 总的理赔支付为 $B(1000,0.001)$ 分布, 其中 $B(n,p)$ 表示参数为 n,p 的二项分布. 由于这里 $n=1000$ 非常大, $p=0.001$ 非常小, 我们将用 Poisson(np) 分布来近似所要求的概率. 计算于 3.5 而非 4 处的概率, 再用一个连续性的修正, 我们有

$$\Pr[S\geqslant 3.5]=1-e^{-1}-e^{-1}-\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{6}e^{-1}=0.01899. \tag{2.53}$$

注意到所求的概率精确值为 0.01893. 尽管此处的 n 比上个例子中的 n 大得多, 但用 CLT 给出的近似却很差: 由 $\mu=E[S]=1$ 和 $\sigma^2=\mathrm{Var}[S]=1$, 得

$$\begin{aligned}\Pr[S\geqslant 3.5] &= \Pr\left[\frac{S-\mu}{\sigma}\geqslant\frac{3.5-\mu}{\sigma}\right]\\ &\approx 1-\Phi(2.5)=0.0062.\end{aligned} \tag{2.54}$$

这个例子中，CLT 近似差的原因是，每一项 X_i 都是有偏度的，进而导致 S 有偏度 $\gamma_S = 1$. 而在前一个例子中，我们考虑的是对称分布，收敛速度较快，这可从 (2.51) 的推导看出. ∇

除了 CLT 近似，我们还要给出两种更精细的近似：*平移伽玛近似*和*正态功效近似*(NP 近似). 从数值示例中可以看出，这两种近似比 CLT 近似精确得多，而它们各自的误差是可比较的，和所涉及到的前三阶矩估计缺乏精度所造成的错误比起来，这些误差是无关紧要的，可以忽略的.

平移伽玛近似

大多数保单的总理赔支付，其分布大体上和伽玛分布近似：向右偏斜 ($\gamma > 0$)，取值非负且具有单峰性. 除了通常的参数 α 和 β, 我们允许偏移大小为 x_0 的距离，从而引入第三个自由度. 因此，我们用 $Z + x_0$ 的分布函数来近似 S 的分布函数，其中 Z 服从 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 分布. 我们选择 α, β 和 x_0 以使得 $Z + x_0$ 与 S 有相同的前三阶矩.

平移伽玛近似可以表述如下：

$$F_S(s) \approx G(s - x_0; \alpha, \beta), \tag{2.55}$$

其中

$$G(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} \beta^\alpha e^{-\beta y} dy, \quad x \geqslant 0.$$

这里 $G(x; \alpha, \beta)$ 是伽玛分布函数. 为使两分布对应的前三阶矩相同，α, β 和 x_0 的选取必须满足 $\mu = x_0 + \frac{\alpha}{\beta}, \sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$ 和 $\gamma = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$. 于是

$$\alpha = \frac{4}{\gamma^2}, \quad \beta = \frac{2}{\gamma\sigma}, \quad x_0 = \mu - \frac{2\sigma}{\gamma}. \tag{2.56}$$

要使这种近似方法有效，偏度 γ 必须严格为正值. 若 $\gamma \downarrow 0$, 则其极限为正态近似. 注意，如果分布函数 $F(\cdot)$ 和 $G(\cdot)$ 的前三阶矩相同，则由分步积分可以证明 $\int_0^\infty x^j[1 - F(x)]dx, j = 0, 1, 2$. 这就限制了这些分布函数，使其彼此不能差别太大.

例 2.5.4(各种不同的近似，续) 如果 $S \sim$ Poisson (1), 则 $\mu = \sigma = \gamma = 1$, 于是由 (2.56) 得 $\alpha = 4, \beta = 2$ 和 $x_0 = -1$. 因此，$\Pr[S \geqslant 3.5] \approx 1 - G(3.5 - (-1); 4, 2) = 0.0212$. 这个结果比 CLT 近似更接近于真实值. ∇

平移伽玛近似可以非常简单地对停止损失赔付 $(S-d)_+$ 或自留损失 $S-(S-d)_+$ 的各种矩作出近似. 这种方法可能存在的不足之处是需要求伽玛分布的数值计算，但是大多数电子制表软件是能够求出伽玛分布函数值，尽管精确性有待进一步改进. 注意在很多实践应用中，特别是在 MS Excel, 参数 β 应替换为 $1/\beta$.

在计算中有时会碰到没有现成分布表可以例用的情况，只要注意到事实 $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ 等价于 $2\beta Y \sim \chi^2_{2\alpha}$, 我们就可以利用 χ^2- 分布表. 通常都需要对 χ^2- 分布

表进行插值以得到我们想要的值. 另一个处理的方法是利用 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 分布和泊松分布之间的关系，其中 α 为整数值，见习题.

例 2.5.5(平移伽玛近似)　总的理赔支付 S 有均值 10000, 标准差 1000 和偏度为 1. 由 (2.56) 得 $\alpha=4$, $\beta=0.002$ 和 $x_0=8000$. 因此,

$$\begin{aligned}\Pr[S>13000] &\approx 1-G(13000-8000;4,0.002)\\ &=1-G(20;4,0.5)\\ &=\Pr[\chi_8^2>20].\end{aligned}\tag{2.57}$$

其真值为 0.010, 这与 χ_8^2 分布的 99% 分位数 (= 20.1) 相一致. 通常的 CLT 近似值更小，只有 0.0013.

由同样的 χ_8^2- 分布的分位点表，我们知道 $\Pr[\chi_8^2>15.5]=0.05$. 因此，可以对 (2.57) 作逆运算，求出水平 95% 的在险价值为 11875.　∇

注 2.5.6(平移伽玛分布的正态近似)　当 α 为整数时，$\Gamma(\alpha,\beta)$ 分布是 α 个 $\mathrm{Exp}(\beta)$ 分布的卷积. 根据这一事实和 CLT, 当 α 较大时，我们可以用一个正态分布来近似 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 分布. 当然，在这里讨论这种情况是无意义的，因为这又变成了简单的 CLT 近似. 我们希望得到更精确的近似. 用下面这样的近似可能会更好一点：若 $Y\sim\Gamma(\alpha,\beta)$, 其中 $\alpha\geqslant 1/4$ (于是 $\gamma_Y\leqslant 4$), 则近似有 $\sqrt{4\beta Y}-\sqrt{4\alpha-1}\sim N(0,1)$, 见习题 §2.5 第 14 题. 对于以参数为 α,β 和 x_0 的平移伽玛分布作为 S 的近似，有

$$\Pr[S\leqslant s]\approx\Phi\left(\sqrt{4\beta(s-x_0)}-\sqrt{4\alpha-1}\right).\tag{2.58}$$

相应的逆函数或水平 $1-\varepsilon$ 的在险价值可从下式得到

$$\Pr\left[S\leqslant x_0+\frac{1}{4\beta}(y+\sqrt{4\alpha-1})^2\right]\approx 1-\varepsilon,\tag{2.59}$$

其中 y 满足 $\Phi(y)=1-\varepsilon$.

将 (2.56) 中的 α,β 和 x_0 代入 (2.59), 得

$$\Pr\left[\frac{S-\mu}{\sigma}\leqslant y+\frac{\gamma}{8}(y^2-1)-y\left(1-\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{16}}\right)\right]\approx 1-\varepsilon.\tag{2.60}$$

不等式的右端是 y 加上一个修正项以补偿 S 的偏度. 由 (2.58) 得到

$$\Pr\left[\frac{S-\mu}{\sigma}\leqslant z\right]\approx\Phi\left(\sqrt{\frac{16}{\gamma^2}+\frac{8z}{\gamma}}-\sqrt{\frac{16}{\gamma^2}-1}\right).\tag{2.61}$$

当偏度趋于 0 时，(2.60) 中的两个修正项将会消失，同时可证明 (2.61) 收敛于 $\Phi(z)$.

∇

NP 近似

下面的近似非常类似于 (2.60). 修正项具有简洁的形式，且稍微大一些. 可以对分布函数作某种展开得到，但这里我们不再给出具体的推导.

如果 $E[S]=\mu$, $\mathrm{Var}[S]=\sigma^2$ 和 $\gamma_S=\gamma$, 则当 $s\geqslant 1$ 时

$$\Pr\left[\frac{S-\mu}{\sigma}\leqslant s+\frac{\gamma}{6}(s^2-1)\right]\approx\Phi(s), \tag{2.62}$$

或等价于，当 $x\geqslant 1$ 时,

$$\Pr\left[\frac{S-\mu}{\sigma}\leqslant x\right]\approx\Phi\left(\sqrt{\frac{9}{\gamma^2}+\frac{6x}{\gamma}+1}-\frac{3}{\gamma}\right). \tag{2.63}$$

(2.63) 可用来近似 S 的分布函数， (2.62) 可以得到近似的分位数. 若 $s<1$ (或 $x<1$), 则修正项为负数，这表明 CLT 近似较保守.

例 2.5.7(各种近似，续)　如果 $S\sim\mathrm{Poisson}(1)$, 则 NP 近似得到 $\Pr[S\geqslant 3.5]\approx 1-\Phi(2)=0.0228$. 该近似值也是比 CLT 近似要好.　∇

例 2.5.8(用 NP 近似重新计算例 2.5.5)　我们用 (2.62) 决定资本量，以使资本以 95% 的概率不小于理赔额 S：

$$\Pr\left[\frac{S-\mu}{\sigma}\leqslant s+\frac{\gamma}{6}(s^2-1)\right]\approx\Phi(s)=0.95\quad(\text{当 } s=1.645 \text{ 时}), \tag{2.64}$$

因此，S 的 95% 的分位点为

$$E[S]+\sigma_S\left(1.645+\frac{\gamma}{6}(1.645^2-1)\right)=E[S]+1.929\sigma_S=11929. \tag{2.65}$$

为计算资本量 13000 不足以弥补损失 S 的概率，我们对 $\mu=10000$, $\sigma=1000$ 和 $\gamma=1$ 应用 (2.63):

$$\Pr[S>13000]=\Pr\left[\frac{S-\mu}{\sigma}>3\right]\approx 1-\Phi(\sqrt{9+6\times 3+1}-3) \tag{2.66}$$

$$=1-\Phi(2.29)=0.011.$$

注意不同近似方法得到的结果对比. 平移伽玛近似给出的结果是 0.010, 近似 (2.58) 或 (2.61) 给出的是 0.007, 而 CLT 近似只有 0.0013.　∇

§ 2.6　应用：最优再保险

一个保险人希望对 20000 份一年期寿险保单寻求一个最佳再保险，这批保单按保险金额可以分为以下三种:

保险额 b_k	保单数 n_k
1	10000
2	5000
3	5000

每一个被保险人在一年内死亡的概率是 $q_k = 0.01$, 保单之间是相互独立的. 保险人希望通过对最佳自留额的选取，即每份保单的最大支付，尽量提高其在业务运营中能够满足其财务职责的概率. 一次理赔中扣除自留额以外的剩余部分是由再保险人支付. 例如，对于 1.6 的自留额，保险金额为 2 的某个被保险人死亡，该保险人赔偿 1.6, 再保险人赔偿 0.4. 收到保费后，保险人持有资金 B 以应付理赔和支付再保险保费. 再保险保费是净保费的 120%.

首先，置自留额为 2, 从保险人的角度看，保单是如下分布的：

保险额 b_k	保单数 n_k
1	10000
2	10000

保险人总的理赔数额 S 的均值和方差分别为

$$
\begin{aligned}
E[S] &= n_1b_1q_1 + n_2b_2q_2 \\
&= 10000 \times 1 \times 0.01 + 10000 \times 2 \times 0.01 = 300, \\
\mathrm{Var}[S] &= n_1b_1^2q_1(1-q_1) + n_2b_2^2q_2(1-q_2) \\
&= 10000 \times 1 \times 0.01 \times 0.99 + 10000 \times 4 \times 0.01 \times 0.99 \\
&= 495.
\end{aligned} \tag{2.67}
$$

由中心极限定理， 我们得到成本超过可用资金 B 的概率 (成本等于 S 加上再保保费 $1.2 \times 0.01 \times 5000 \times 1 = 60$)：

$$
\begin{aligned}
\Pr[S+60>B] &= \Pr\left[\frac{S-E[S]}{\sigma_S} > \frac{B-360}{\sqrt{495}}\right] \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{B-360}{\sqrt{495}}\right).
\end{aligned} \tag{2.68}
$$

当自留额界于 2 和 3 之间时，这个概率如何，以及对于给定的资金 B 如何决定自留额以使保险人不破产的概率达到最大，我们留给读者自己分析. 见本节的习题.

§ 2.7 习 题

§2.2

1. 设理赔概率为 0.1, 求以下两种情形下风险 $X = IB$ 的均值与方差： (1) B 以概率 1 等于 5; (2) $B \sim U(0, 10)$.

2. 投掷一个均匀的骰子，出现的点数记为 X. 然后再抛掷一枚均匀的硬币 X 次，并以 Y 记硬币正面出现的次数. 求 Y 的均值与方差.

3. 画出例 2.2.4 中 X 的分布函数. 利用微分求被保险人为寻求损失 $1.1X$ 的保险保障愿意支付的保费. 把损失 X 表达成 $X = IB$ 重新计算上述的保费. 损失由 X 放大为 $1.1X$, 请问相应的零效用保费是否同步放大？

4. 在例 2.2.5 中，利用微分求 $E[X]$, $\mathrm{Var}[X]$ 和矩母函数 $m_X(t)$, 并画出 "密度" 图.

5. 设 $X = IB$, 求 $m_X(t)$?

6. 考虑如下的分布函数 F:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < 2 \text{ 时}, \\ x/4, & \text{当 } 2 \leqslant x < 4 \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } 4 \leqslant x \text{ 时}. \end{cases}$$

试确定相互独立的随机变量 I, X 和 Y 使得 $Z = IX + (1 - I)Y$ 的分布函数为 F, 其中 I 为 Bernoulli 随机变量， X 为离散型， Y 为连续型.

7. 考虑如下的分布函数 F 的微分：

$$dF(x) = \begin{cases} dx/3, & \text{当 } 0 < x < 1 \text{ 或 } 2 < x < 3 \text{ 时}, \\ \dfrac{1}{6}, & \text{当 } x \in \{1, 2\} \text{ 时}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

试确定一个离散分布函数 G, 一个连续分布函数 H 和一个实常数 c 使得 $F(x) = cG(x) + (1 - c)H(x), \forall x$.

8. 设 $T = qX + (1-q)Y$, $Z = IX + (1-I)Y$, 其中 $I \sim \text{Bernoulli}(q)$. 求 $E[T^k]$ 和 $E[Z^k]$, $k = 1, 2$.

9. 在上题中，如果再假设 X 和 Y 相互独立且有共同的分布 $N(0, 1)$. 求 T 和 Z 的分布.

§2.3

1. 设 $S = X_1 + 2X_2 + 3X_3$, 其中 $X_j \sim \text{Poisson}(j)$, 求 $\Pr[S = s]$, $s = 0, 1, \cdots, 6$.

2. 在例 2.3.2 中，求为计算所有的概率 $f_{1+2+3}(x)$ 所需要作的非零项乘积运算的次数. 如果 $f_k = f_3$, $k = 4, \cdots, n$, 那么为计算 $F_{1+\cdots+n}(x)$, $x = 0, \cdots, 4n-4$, 需要作多少次乘积运算？

3. 通过卷积证明两个独立的正态随机变量之和仍服从正态分布.

4. [♠] 利用卷积验证例 2.3.3 中表达式 (2.37) 当 $n = 1, 2, 3$ 时成立. 对上述的 n 确定 $F_S(x)$ 的值. 用归纳法证明 (2.37) 对任意 n 成立.

5. 设 $X \sim U(0, 3)$, $Y \sim U(-1, 1)$. 利用区域 $\{(x, y) | x + y \leqslant z, x \in (0, 1), y \in (0, 2)\}$ 的面积来计算 $F_{X+Y}(z)$.

§2.4

1. 设 X_1, X_2 相互独立, 且 $X_k \sim \text{Exp}(k)$, 利用卷积和矩母函数分别确定 $S = X_1 + X_2$ 的分布函数.

2. 利用矩母函数重新考虑例 2.3.4.

3. 利用中心矩给出四阶半不变量 κ_4 的表示.

4. 试确定以下分布的累积量母函数和半不变量: 泊松分布、二项分布、正态分布和伽玛分布.

5. 证明 12 个相互独立且分别服从 $U(0,1)$ 分布的随机变量之和的均值为 6, 方差为 1, 并确定其 κ_3 和 κ_4.

6. 求 Poisson(μ) 分布的偏度.

7. 求 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 分布的偏度.

8. 证明: 如果 X 是对称的, 则 $\gamma_X = 0$. 设 X_1, X_2 和 X_3 分别服从参数为 0.4, 0.7 和 p 的 Bernoulli 分布, 且相互独立, 记 $S = X_1 + X_2 + X_3$. 求 p 使得 S 的偏度 $\gamma_S = 0$, 并验证 S 为非对称的.

9. 设 $I \sim \text{Bernoulli}(q)$, b 是固定的实数, 试确定型如 Ib 风险的偏度, 并给出 q 和 b 的取值范围使得该偏度为 0. 何时 I 是对称的?

10. 求二项分布、泊松分布和负二项分布的概率母函数.

11. 证明半不变量在以下意义下保持不变: 如 X 和 Y 相互独立, 则 $X + Y$ 的 k 阶半不变量等于 X 与 Y 的 k 阶半不变量之和.

12. 证明: 如果 X 和 Y 有相同的概率母函数, 并且取值于 $\{0, 1, \cdots, n\}$, 则 X 和 Y 同分布. 如果风险变量 $X_1, X_2, \cdots$ 取值于 $\{0, 1, \cdots, n\}$, 使得当 $i \to \infty$ 时 X_i 的概率母函数收敛于 Y 的概率母函数, 证明 $\Pr[X_i = x] \to \Pr[Y = x], \forall x$.

13. 证明: 如果 X 和 Y 有相同的矩母函数, 并且取值于 $\{0, \delta, 2\delta, \cdots, n\delta\}$, 其中 $\delta > 0$, 则 X 和 Y 同分布.

14. 对特殊情形 $X \sim \text{Exp}(1)$, 验证 (2.49) 中的等式 $\phi_X(t) = m_X(it)$. 证明: 如果 X 是关于 0 点对称, 则其特征函数是实值的.

15. 设 $X \sim B(8, p)$, $Y \sim \text{Bernoulli}(1-p)$, 证明 $Z = X + 2Y$ 的偏度为 0, 并确定 p 的取值使得 Z 是对称的.

16. 设 $X \sim \Gamma(2, 1)$, $Y \sim \text{Exp}(1)$, 试确定 δ 使得 $X - \delta Y$ 的偏度为 0.

17. 是否可以利用一个随机变量的概率母函数求该变量的各阶矩? 是否可以利用一个整值变量的矩母函数来求该变量的概率函数?

§2.5

1. 在例 2.5.3 中把 3.5 改为 $3-0$, $3+0$, $4-0$ 和 $4+0$, 结果如何? 是否需要对连续性作出修正?

2. 证明 NP 近似的两种形式 (2.62) 和 (2.63) 是等价的.

3. 推导 (2.60) 和 (2.61).

4. 如果固定 μ 和 σ^2 而令 $\gamma \downarrow 0$; 证明平移伽玛近似和 NP 近似的结果是正态近似.

5. 用 NP 近似分别近似求出 χ^2_{18} 分布 $\varepsilon = 0.05, 0.1, 0.5, 0.9, 0.95$ 分位点值，并与 χ^2- 分布表查出的精确值作对比. 如果用平移伽玛近似， 其结果又如何？

6. 用例 2.5.4 后面的方法近似求出 $G(4.5; 4, 2)$.

7. 利用泊松过程中的恒等式 "等待第 n 个事件发生的时间大于 x" 等价于 "在 $(0, x)$ 时间段中，发生的事件数最多为 $n-1$"，证明：若 $Z \sim \Gamma(n, 1)$, $N \sim \text{Poisson}(x)$, 则 $\Pr[Z > x] = \Pr[N < n]$. 在计算平移伽玛近似时，如何利用这一事实？

8. 取 $\varepsilon = 0.05, 0.1, 0.5, 0.9, 0.95$, 对比由 (2.59) 得到的 χ^2_{18} 分布的近似 ε 分位点和对应的精确分位点值.

9. 一保险人有 2000 份一年期寿险保单，其中有一半的保单其理赔支付是 $b_1 = 1$, 被保险人在一年内死亡的概率是 $q_1 = 1\%$; 另一半的保单是 $b_2 = 2$ 和 $q_2 = 5\%$. 用中心极限定理确定附加在净保费之上的最小安全附加系数，以使总的理赔支付超过总的保费收入的概率至多为 5%.

10. 条件同前题，利用总的理赔支付的三阶半不变量等于风险的三阶半不变量之和，用 NP 近似重新计算第 9 题.

11. 证明对于所有的 $x \geqslant -1$,(2.63) 的右边有定义. 其最小值和最大值分别是什么？是否为增函数？若 $x = 1$, 情况又如何？

12. 设 X 的均值为 $\mu = 1000$, 标准差 $\sigma = 2000$. 试确定以下分布的偏度 γ: (i) $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, (ii) $X \sim \text{IG}(\alpha, \beta)$ (逆高斯分布), (iii) $X \sim \text{LN}(\nu, \tau^2)$ (对数正态分布). 并证明如果 X 服从 Pareto 分布，则偏度为无穷大.

13. 一份风险组合包括两种类型的保单合同. 对于类型 k $(k = 1, 2)$ 理赔的概率是 q_k，保单的数目是 n_k. 如果有理赔发生，则理赔量为以概率 $p_k(x)$ 取值 x:

	n_k	q_k	$p_k(1)$	$p_k(2)$	$p_k(3)$
类型 1	1000	0.01	0.5	0	0.5
类型 2	2000	0.02	0.5	0.5	0

假设保单之间相互独立. 以 S_k 记类型 k 的保单总的理赔数额，并记 $S = S_1 + S_2$. 计算 S_k 的均值和方差， $k = 1, 2$, 再计算 S 的均值和方差. 用 CLT 计算以 95% 的概率能够偿付所有理赔额的最少资本金.

14. [♠] 设 $Y \sim N(\sqrt{4\alpha - 1}, 1)$, $U \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ 和 $T = \sqrt{4\beta U}$. 证明 $E[T] \approx E[Y]$, $E[T^2] = E[Y^2]$, 所以 $\text{Var}[T] \approx 1$. 再比较 T 与 Y 的 3 阶与 4 阶矩.

15. [♠] 例 2.5.3 中用到的 "连续性修正"，即用连续随机变量分布函数对整值随机变量的分布函数作出近似，其理由如下：设 G 为某非负随机变量的连续分布函数，由关系式 $H(k + \varepsilon) = G(k + 0.5), k = 0, 1, 2, \cdots, 0 \leqslant \varepsilon < 1$, 构造分布函数 H. 为近似求出 (1.34) 的右端项 $(d = 0)$, 采用在任意长为 1 的区间里取被积函数中间点值的原则，证明 G 和 H 的均值是大约相等的. 由此推出，如果 G 是一个连续分布函数，希望用来近似离散分布函数 F 且与 F 有相同的均值，那么令 $F(x) := G(x + 0.5)$, 我们可以得到均值大致相同的分布 F 的一个近似 (然而令 $F(x) = G(x)$ 得到的均值是 $\mu + 0.5$ 而不是 μ. 由此，粗略地说，用来逼近 (1.34) 的求和项的尾概率过大，其因子为 $\frac{1}{2\mu}$).

16. 为体会近似误差与在 NP 近似和平移伽玛近似中对 μ, σ, γ 进行估计时的估计精度所引

起的误差的区别, 重新计算例 2.5.5, 其中的参数按如下方式改变: (i) $\mu = 10100$, (ii) $\sigma = 1020$, (iii) $\mu = 10100$ 和 $\sigma = 1020$, (iv) $\gamma = 1.03$, 其余参数同例 2.5.5.

§2.6

1. 在 §2.6 的假设下, 计算当自留额 $d \in [2,3]$ 时资本金 B 不足的概率. 若 $B = 405$, 给出 $d = 2$ 和 $d = 3$ 的计算结果.

2. 对 $B = 405$, 求自留额 $d \in [2,3]$ 以使 B 不足的概率最小. 若 $B = 404$, 最佳的自留额为多少?

3. 设 $d = 2$, 用 NP 近似计算 B 不足的概率.



第 3 章　聚合风险模型

§ 3.1　引　言

本章我们要引入聚合风险模型. 同第 2 章那样, 我们要计算在某个时间段内理赔总额的分布函数, 但是现在要把风险组合理解为在随机时间点上产生的理赔全体. 记

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N, \tag{3.1}$$

其中 N 表示理赔次数, X_i 表示第 i 个理赔额. 此外, 按习惯约定当 $N = 0$ 时 $S = 0$. (3.1) 中 S 的各项对应着实际的理赔; 在 (2.25) 里面有许多项为 0, 这是由于对应的保单没有产生理赔. 理赔次数 N 是一个随机变量, 并且我们假设个体理赔额 X_i 是独立同分布的. 我们还假设 N 和所有的 X_i 独立. 特别, 当 N 服从泊松分布时, S 具有 *复合泊松分布*. 当 N 服从 (负) 二项分布时, S 具有 *复合 (负) 二项分布*.

聚合模型忽略了一些保单信息. 如果一个保单组合只含有一个可能产生高理赔的保单, 那么该项在个体风险模型 (2.25) 中至多会出现一次, 而在聚合模型 (3.1) 中它可以出现若干次. 此外, 在聚合模型中我们要求理赔次数 N 和理赔额 X_i 之间相互独立. 这对于汽车保险行业来说就多少有些不妥了, 例如恶劣的天气条件会导致大量的小理赔. 不过, 在实际中这些现象的影响是很小的.

聚合风险模型的主要优点是在计算上它是一个很有效的模型, 该模型也非常接近实际. 我们将给出一些算法来计算 (3.1) 中 S 的分布. 一个易于理解的却又相当费时费力的算法是卷积. 我们还将讨论稀疏向量算法 (在 N 服从泊松分布时很有用), 该算法的依据是理赔发生次数是一些独立的泊松变量. 最后, 我们可以对一个更大的分布类使用 Panjer 递推算法, 这一算法利用事件 $S = k(k = 0, 1, \cdots, s-1)$ 的概率来递推表示出事件 $S = s$ 的概率. 我们还可以用 N 和 X_i 的矩来表示出 S 的矩. 如果 $E[N]$ 比较大, 我们可以再次利用中心极限定理以及上一章介绍的一些更精细的逼近手法来近似 S 的分布.

接下来, 我们要为 N 和 X_i 寻找一些合适的分布, 以使得聚合模型充分接近于一个给定的个体模型. 泊松分布和负二项分布常常是 N 的理想选择. 我们将给出这些分布之间的一些相互关系, 并讨论复合泊松分布的一些性质.

在过去的几年里, 停止损失保险保单变得更为普遍了. 我们将给出许多技巧来计算离散分布以及某些连续分布的停止损失保费. 利用在第 2 章引入的分布函数

逼近法，我们还可以近似计算停止损失保费.

§3.2 复合分布

设由 (3.1) 给出的 S 具有一个复合分布， 表达式中所有的 X_i 与 X 同分布. 记

$$\mu_k = E[X^k], \qquad P(x) = \Pr[X \leqslant x], \qquad F(s) = \Pr[S \leqslant s]. \tag{3.2}$$

于是，利用给定 N 之下 S 的条件分布，可以计算 S 的期望值. 首先，对 N 的所有可能值应用全概率公式展开，然后再利用 X_i 和 N 的独立性去掉条件 $N=n$. 这样便得到了如下的计算：

$$\begin{aligned}
E[S] &= E[E[S|N]] = \sum_{n=0}^{\infty} E[X_1 + \cdots + X_N | N = n] \Pr[N = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[X_1 + \cdots + X_n | N = n] \Pr[N = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[X_1 + \cdots + X_n] \Pr[N = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\mu_1 \Pr[N = n] = \mu_1 E[N].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

这表明总理赔额的期望值等于期望理赔次数与理赔额期望值的乘积.

总理赔额的方差可以由条件方差的公式来决定 (见 (2.7))：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[S] &= E[\mathrm{Var}[S|N]] + \mathrm{Var}[E[S|N]] \\
&= E[N\mathrm{Var}[X]] + \mathrm{Var}[N\mu_1] \\
&= E[N]\mathrm{Var}[X] + \mu_1^2 \mathrm{Var}[N].
\end{aligned} \tag{3.4}$$

利用 (3.3) 中使用的同样技巧可以求出总理赔额 S 的矩母函数：

$$\begin{aligned}
m_S(t) &= E[E[e^{tS}|N]] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{t(X_1+\cdots+X_N)} | N = n] \Pr[N = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{t(X_1+\cdots+X_n)}] \Pr[N = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \{m_X(t)\}^n \Pr[N = n] = E[(e^{\log m_X(t)})^N] \\
&= m_N(\log m_X(t)).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

例 3.2.1(分布函数具有封闭形式的复合分布) 设 N 服从参数为 p 的几何分布, $0<p<1$, X 服从参数为 1 的指数分布, 即 $X\sim \mathrm{Exp}(1)$. 那么 S 的分布函数是什么?

记 $q=1-p$. 我们首先来计算 S 的矩母函数, 然后尝试通过得到的矩母函数来确定该复合分布. 当 $qe^t<1$ (即 $t<-\log q$) 时, 有

$$m_N(t)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{nt}pq^n=\frac{p}{1-qe^t}. \tag{3.6}$$

由 $X\sim \mathrm{Exp}(1)$ 知 $m_X(t)=(1-t)^{-1}$, 根据 (3.5) 得

$$m_S(t)=m_N(\log m_X(t))=\frac{p}{1-qm_X(t)}=p+q\frac{p}{p-t}. \tag{3.7}$$

可见 S 的矩母函数是常数 0 的矩母函数与 $\mathrm{Exp}(p)$ 分布的矩母函数的一个混合. 由分布函数与矩母函数之间的一一对应关系得到 S 的分布函数也具有同样的混合结构:

$$F(x)=p+q(1-e^{-px})=1-qe^{-px},\quad x\geqslant 0. \tag{3.8}$$

这是一个在 0 点有跳度 p 而在其它处为指数型的分布函数. ∇

复合分布的卷积公式

利用给定 $N=n$ 之下 S 的条件分布, 可计算分布 F:

$$\begin{aligned}F(x)&=\Pr[S\leqslant x]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\Pr[X_1+\cdots+X_N\leqslant x|N=n]\Pr[N=n],\end{aligned} \tag{3.9}$$

因此

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{*n}(x)\Pr[N=n],\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p^{*n}(x)\Pr[N=n]. \tag{3.10}$$

我们称这些表达式为复合分布的 *卷积公式*.

例 3.2.2(卷积公式的应用) 设 $\Pr[N=j-1]=0.1j$, $j=1,2,3,4$, 再设 $p(1)=0.4$, $p(2)=0.6$. 由 (3.10), 分布 $F(x)$ 的计算如下:

x	$p^{*0}(x)$	$p^{*1}(x)$	$p^{*2}(x)$	$p^{*3}(x)$		$f(x)$		$F(x)$
0	1					0.1000		0.1000
1		0.4				0.0800		0.1800
2		0.6	0.16			0.1680		0.3480
3			0.48	0.064		0.1696		0.5176
4			0.36	0.288		$\vdots$		$\vdots$
5				0.432		$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$				$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	$\updownarrow\times$	$+\updownarrow\times$	$+\updownarrow\times$	$+\updownarrow\times$	$=$	$\uparrow$	$\Rightarrow$	$\uparrow$
$\Pr[N=n]$	0.1	0.2	0.3	0.4				

把最后一行的概率 $\Pr[N=n]$ 对应乘以上面每一行的数字，然后把所得乘积的和放到 $f(x)$ 列中对应的行上．例如： $0.2\times0.6+0.3\times0.16=0.168$. ∇

例 3.2.3(复合分布，指数型理赔额) 由 $F(x)$ 的计算公式 (3.10) 可以看出，为了方便起见应当选取的 X 的分布使其 n 重卷积易于计算．正态分布和伽玛分布便是如此： n 个服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布的独立随机变量和的分布为 $N(n\mu,n\sigma^2)$; 同样，n 个服从 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 分布的独立随机变量和的分布为 $\Gamma(n\alpha,\beta)$.

设理赔额服从指数 Exp(1) 分布， 即 $\Gamma(1,1)$ 分布． 由排队论 (也可参阅习题 §2.5 第 7 题) 知等待第 n 个事件发生的时间至少为 x(或者到时刻 x 为止至多发生 $n-1$ 个事件) 的概率是一个 Poisson(x) 概率．于是

$$1-P^{*n}(x)=\int_x^\infty y^{n-1}\frac{e^{-y}}{(n-1)!}dy=e^{-x}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^i}{i!}. \tag{3.11}$$

这也可由分部积分或由比较导数的办法来证明 (见习题 §3.2 第 7 题). 所以

$$1-F(x)=\sum_{n=1}^\infty \Pr[N=n]e^{-x}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^i}{i!},\quad x>0. \tag{3.12}$$

上式给出了一个有效的算法．事实上，只要 $\Pr[N\geqslant n]$ 小于所要求的精度，我们便可以停止外层的求和运算．此外，内层两个相继的和仅仅相差最后一项，所以单个求和便足够了．

如果 (3.1) 中的加项服从离散分布，则和 S 的分布的计算会大大得简化．基于此，我们将常常用一个离散型随机变量来近似 X. ∇

§ 3.3 理赔次数的分布

在实际中，不会有大量的相关数据供我们使用以确定 N 的分布，从而我们必

须为 N 选用一个模型，且该模型最好含有几个参数. 为了描述 "稀有事件", 只含有一个参数的泊松分布往往是第一选择. 众所周知， Poisson(λ) 分布的期望和方差都是 λ. 如果理赔次数的模型在期望值附近扩散得较大，我们也可以使用负二项分布来替代泊松分布. 下面我们来考虑两个模型，其中后一模型的分布可视为泊松分布的推广.

例 3.3.1(泊松分布，参数的不确定性) 设某个汽车驾驶员在一年中发生的车祸次数服从一个 Poisson(λ) 分布. 参数 λ 未知，且因人而异. 我们设 λ 是一个随机变量 Λ 的输出值. 如果给定 $\Lambda=\lambda$, 一年中车祸的次数 N 的条件分布是 Poisson(λ), 那么 N 的边缘分布是什么？

记 Λ 的分布函数为 $U(\lambda)=\Pr[\Lambda\leqslant\lambda]$, 则 N 的边缘分布为

$$\Pr[N=n]=\int_0^\infty \Pr[N=n|\Lambda=\lambda]dU(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}dU(\lambda), \tag{3.13}$$

N 的期望和方差分别为

$$\begin{aligned} E[N] &= E[E[N|\Lambda]]=E[\Lambda];\\ \mathrm{Var}[N] &= E[\mathrm{Var}[N|\Lambda]]+\mathrm{Var}[E[N|\Lambda]]=E[\Lambda]+\mathrm{Var}[\Lambda]\geqslant E[N]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

现在再假设 $\Lambda\sim\Gamma(\alpha,\beta)$, 于是

$$\begin{aligned} m_N(t) &= E[E[e^{tN}|\Lambda]]=E[\exp\{\Lambda(e^t-1)\}]=m_\Lambda(e^t-1)\\ &= \left(\frac{\beta}{\beta-(e^t-1)}\right)^\alpha=\left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^\alpha, \end{aligned} \tag{3.15}$$

其中 $p=\beta/(\beta+1)$, 从而 N 服从参数为 α 和 $\beta/(\beta+1)$) 的 负二项分布 (记为 $\mathrm{NB}(\alpha,\beta/(\beta+1))$).

显然，对应于一个特定驾驶员，Λ 是一个不可观测的随机变量. 这是一个 "远期理赔频率", 就是说，当该驾驶员可以在相当长的时期被观测并且在此期间其理赔模式不变的情况下，其每年被观测到的车祸次数便收敛于这个 "远期理赔频率". 随机变量 Λ 的分布被称为 结构分布(见第 7 章). ▽

例 3.3.2(复合负二项分布也是复合泊松分布) 在某个交叉路口一年之中发生 N 次重大交通事故. 第 i 次事故中伤亡人数是 L_i, 所以总伤亡人数为 $S=L_1+L_2+\cdots+L_N$. 设 $N\sim$Poisson(λ), L_i 服从参数为 c 的对数分布， 即

$$\Pr[L_i=k]=\frac{c^k}{k\,h(c)},\qquad k=1,2,\cdots \quad \text{和} \quad 0<c<1. \tag{3.16}$$

这里除以函数 $h(\cdot)$ 是为了使得这些概率之和为 1. 显然，由通常的 $\log(1+x)$ 的级数展开式知这个函数等于 $h(c)=-\log(1-c)$, 为一个对数函数. 现问 S 的分布是什么？

注意到 L_i 的矩母函数是

$$m_L(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{tk}c^k}{k\,h(c)}=\frac{h(ce^t)}{h(c)}. \tag{3.17}$$

于是 S 的矩母函数为

$$\begin{aligned}m_S(t)&=m_N(\log m_L(t))=\exp\lambda(m_L(t)-1)\\&=\left(\exp\{h(ce^t)-h(c)\}\right)^{\lambda/h(c)}=\left(\frac{1-c}{1-ce^t}\right)^{\lambda/h(c)}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

这是一个参数为 $\lambda/h(c)=-\lambda/\log(1-c)$ 和 $1-c$ 的负二项分布的矩母函数.

一方面，对伤亡者的总赔付 Z 是 Poisson(λ) 次重大车祸导致的赔付和，所以服从一个复合泊松分布. 另一方面，按照伤亡者相加我们又得到总赔付 Z 服从一个复合负二项分布. 可以证明，如果 S_2 是一个复合负二项分布，其中负二项分布的参数为 $r, p=1-q$, 理赔分布 $P_2(\cdot)$, 而 S_1 是一个具有参数 λ 和理赔分布 $P_1(\cdot)$ 的复合泊松分布. 如果

$$\lambda=rh(q)\quad 和\quad P_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{kh(q)}P_2^{*k}(x), \tag{3.19}$$

那么 S_2 与 S_1 同分布. 可见，任何一个复合负二项分布可以写成一个复合泊松分布. ▽

注 3.3.3(概率论中的复合泊松分布) 复合泊松分布在概率论中也受到关注. 如果一个随机变量 X 满足性质: 对任何一个 n, 存在一个 iid 随机变量列 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 使得 $X\sim X_1+X_2+\cdots+X_n$, 则称 X 是无穷可分的. 当把复合泊松分布类拓展成一个更大的类，使其对极限运算封闭，我们便恰好得到了无穷可分分布类，该类包含伽玛分布和正态分布.

§ 3.4 复合泊松分布

本节给出复合泊松分布的一些重要定理，并且利用这些定理来构造一个更好的算法来计算 $F(\cdot)$. 首先，我们证明复合泊松分布类关于卷积封闭.

定理 3.4.1(复合泊松的和仍是复合泊松) 如果 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 是一列独立的复合泊松随机变量，分别具有参数 λ_i 和理赔分布 P_i, $i=1,2,\cdots,m$, 那么 $S=S_1+S_2+\cdots+S_m$ 仍是一个复合泊松随机变量，具有参数

$$\lambda=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\quad 和\quad P(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\lambda}P_i(x). \tag{3.20}$$

证明 记 m_i 为 P_i 的矩母函数，则 S 的矩母函数为

$$m_S(t) = \prod_{i=1}^{m} \exp\{\lambda_i[m_i(t) - 1]\} = \exp\left\{\lambda\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\lambda}m_i(t) - 1\right)\right\}. \tag{3.21}$$

故 S 是一个复合泊松随机变量，其参数由 (3.20) 给出. ∇

由此可见，m 个独立复合泊松保单组合的总和仍然服从复合泊松分布，或者对同一个复合泊松保单观测 m 年且假设逐年的结果相互独立，则 m 年结果的总和也仍然服从复合泊松分布.

我们来看一个特例. 当每一个 S_i 有非随机的理赔额 x_i 时，我们有 $S_i = x_iN_i$，其中 $N_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$. 现设所有 x_i 全不相同，则随机变量

$$S = x_1N_1 + x_2N_2 + \cdots + x_mN_m \tag{3.22}$$

是一个复合泊松变量，参数为

$$\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \quad 和 \quad p(x_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda},\ \ i = 1, \cdots, m. \tag{3.23}$$

我们还可以证明逆命题如下.

定理 3.4.2(理赔次数服从独立泊松分布) 设 S 服从复合泊松分布，其中参数为 λ, 理赔分布是一个离散型分布，满足

$$\pi_i = p(x_i) = \Pr[X = x_i], \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{3.24}$$

如果把 S 写成 (3.22) 那样，其中 N_i 表示理赔额 x_i 的发生次数 (即 S 的和式里面值 x_i 出现的次数), 那么 $N_1, \cdots, N_m$ 构成一列独立 $\text{Poisson}(\lambda\pi_i)$ 随机变量，$i = 1, \cdots, m$.

证明 记 $N = N_1 + \cdots + N_m$, $n = n_1 + \cdots + n_m$. 对 $N = n$ 取条件得 $(N_1, \cdots, N_m)$ 的条件分布为多项分布 $\text{M}(n, \pi_1, \cdots, \pi_m)$. 于是,

$$\begin{aligned}
&\Pr[N_1 = n_1, \cdots, N_m = n_m] \\
&\quad = \Pr[N_1 = n_1, \cdots, N_m = n_m | N = n]\Pr[N = n] \\
&\quad = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}\pi_1^{n_1}\pi_2^{n_2}\cdots\pi_m^{n_m}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&\quad = \prod_{i=1}^{m} e^{-\lambda\pi_i}\frac{(\lambda\pi_i)^{n_i}}{n_i!}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

把上式对所有的 n_i $(i \neq k)$ 相加，可求出 N_k 的边际分布为 $\text{Poisson}(\lambda\pi_k)$. N_i 之间的独立性是由于 $\Pr[N_1 = n_1, \cdots, N_m = n_m]$ 等于 $N_i = n_i$ 的边际概率的乘积. ∇

例 3.4.3(应用：稀疏向量算法) 如果理赔额 X 是非负整值随机变量，可以用一种有效的方式来计算复合泊松分布 F. 我们用下面的例子来演示这个方法. 设 $\lambda=4$ 且 $\Pr[X=1,2,3]=\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$. 然后，如 (3.22) 那样，把所有的项集中起来，可以把 S 写成 $S=1N_1+2N_2+3N_3$, 再用卷积来计算 S 的分布. 现计算 $f(x)=\Pr[S=x]$ 如下：

x	$\Pr[N_1=x]$ $(e^{-1}\times)$	$\times\Pr[2N_2=x]$ $(e^{-2}\times)$	$=\Pr[N_1+2N_2=x]$ $(e^{-3}\times)$	$\times\Pr[3N_3=x]$ $(e^{-1}\times)$	$=\Pr[S=x]$ $(e^{-4}\times)$
0	1	1	1	1	1
1	1	–	1	–	1
2	1/2	2	5/2	–	5/2
3	1/6	–	13/6	1	19/6
4	1/24	2	⋮	–	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	↑	↑		↑	
	$1/x!$	$2^{x/2}/(x/2)!$		$1/(x/3)!$	

理赔额为 $1,2,\cdots,j-1$ 的那些理赔的总和被卷积上 jN_j. 在以 jN_j 的概率开头的那些列中，我们只需要在 $0,j,2j,\cdots$ 行对应的位置上填写相应的结果，这就是之所以这种方法被称为“稀疏向量”算法的原因. 这些概率都是一些 $\text{Poisson}(\lambda\pi_j)$ 概率. ∇

§ 3.5 Panjer 递推

尽管稀疏向量算法比卷积公式好用多了，但是这里仍然有一些可以改进的地方. Panjer 于 1981 年给出了一种计算概率 $f(x)$ 的递归方法. 类似的公式在排队论中已被推导. 继 Panjer 的成果公开发表之后，精算领域已经出现了大量的论文研究类似的递归式. Panjer 的递归公式如下.

定理 3.5.1(Panjer 递推) 考虑这样一个复合分布，其中理赔额取非负整值，具有概率分布函数 $p(x)$, $x=0,1,2,\cdots$, 而且事件“有 n 个理赔发生”的概率 q_n 满足递归式

$$q_n=\left(a+\frac{b}{n}\right)q_{n-1},\quad n=1,2,\cdots, \tag{3.26}$$

这里 a 和 b 是两个实数. 于是事件“理赔总额等于 s”的概率满足如下关系式：

$$f(0)=\begin{cases}\Pr[N=0], & \text{当 } p(0)=0 \text{ 时},\\ m_N(\log p(0)), & \text{当 } p(0)>0 \text{ 时},\end{cases}$$

$$f(s) = \frac{1}{1 - ap(0)} \sum_{h=1}^{s} \left(a + \frac{bh}{s}\right) p(h) f(s-h), \quad s = 1, 2, \cdots. \tag{3.27}$$

证明　初始值 $f(0)$ 由 $\Pr[S=0] = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[N=n] p^n(0)$ 给出．记 $T_k = X_1 + \cdots + X_k$．首先，由对称性得

$$E\left[a + \frac{bX_1}{s} \middle| T_k = s\right] = a + \frac{b}{k}. \tag{3.28}$$

这个期望也可以由另一种方式来求出：

$$E\left[a + \frac{bX_1}{s} \middle| T_k = s\right] = \sum_{h=0}^{s} \left(a + \frac{bh}{s}\right) \Pr[X_1 = h | T_k = s]$$

$$= \sum_{h=0}^{s} \left(a + \frac{bh}{s}\right) \frac{\Pr[X_1 = h] \Pr[T_k - X_1 = s - h]}{\Pr[T_k = s]}. \tag{3.29}$$

由 (3.26) 和上面的两个等式，对 $s = 1, 2, \cdots$ 我们有

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k \Pr[T_k = s] = \sum_{k=1}^{\infty} q_{k-1} \left(a + \frac{b}{k}\right) \Pr[T_k = s] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} q_{k-1} \sum_{h=0}^{s} \left(a + \frac{bh}{s}\right) \Pr[X_1 = h] \Pr[T_k - X_1 = s - h] \\ &= \sum_{h=0}^{s} \left(a + \frac{bh}{s}\right) \Pr[X_1 = h] \sum_{k=1}^{\infty} q_{k-1} \Pr[T_k - X_1 = s - h] \\ &= \sum_{h=0}^{s} \left(a + \frac{bh}{s}\right) p(h) f(s-h) \\ &= ap(0) f(s) + \sum_{h=1}^{s} \left(a + \frac{bh}{s}\right) p(h) f(s-h). \end{aligned} \tag{3.30}$$

由此立即得到 (3.27) 中的第二个关系式．　　∇

例 3.5.2(适合使用 Panjer 递推的分布)　只有如下的一些分布满足关系式 (3.26)：

1. Poisson(λ) 分布，此时 $a = 0$, $b = \lambda \geqslant 0$, 并且 (3.27) 可以被简化为

$$\begin{aligned} f(0) &= e^{-\lambda(1-p(0))}, \\ f(s) &= \frac{1}{s} \sum_{h=1}^{s} \lambda h p(h) f(s-h); \end{aligned} \tag{3.31}$$

2. 负二项分布 NB(r, p), 其中 $p = 1 - a$, $r = 1 + \frac{b}{a}$, 所以 $0 < a < 1$, $a + b > 0$;

3. 二项分布 $B(k,p)$, 其中 $p=\frac{a}{a-1}$, $k=-\frac{b+a}{a}$, 所以 $a<0$, $b=-a(k+1)$. 如果 $a+b=0$, 那么 $q_0=1$ 且 $q_j=0$, $j=1,2,\cdots$, 从而得到一个 Poisson(0) 分布. 对于其它一些 a 和 b 的值, (3.26) 未必导出一个概率分布, 例如, 如果 $q_0>0$, 那么 $a+b<0$ 导致了一些负概率, 在 $a<0$ 且对所有的 n 有 $b\neq -a(n+1)$ 时同样的情况也会发生; 如果 $a\geqslant 1$ 且 $a+b>0$, (3.26) 蕴涵了 $(n+1)q_{n+1}\geqslant nq_n$, 于是 $q_n\geqslant \frac{q_1}{n}$, $n=1,2,\cdots$, 从而 $\sum_n q_n=\infty$. ▽

例 3.5.3(Panjer 递推) 如例 3.4.3, 我们再一次考虑一个复合泊松分布, 其中 $\lambda=4$ 且 $\Pr[X=1,2,3]=\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$. 于是把 $\lambda=4$, $p(2)=\frac{1}{2}$ 和 $p(1)=p(3)=\frac{1}{4}$ 代入 (3.31) 得到

$$f(s)=\frac{1}{s}[f(s-1)+4f(s-2)+3f(s-3)],\quad s=1,2,\cdots, \tag{3.32}$$

初始值 $f(0)=e^{-4}\approx 0.0183$. 我们有

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0)=e^{-4},\\ f(2) &= \frac{1}{2}[f(1)+4f(0)]=\frac{5}{2}e^{-4},\\ f(3) &= \frac{1}{3}[f(2)+4f(1)+3f(0)]=\frac{19}{6}e^{-4}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

等等. ▽

例 3.5.4(Panjer 递推与停止损失保费) 对于一个整值随机变量 S, 其取整值自留额的停止损失保费可以表示为 (见 1.4 节):

$$E[(S-d)_+]=\sum_{x=d}^{\infty}(x-d)f(x)=\sum_{x=d}^{\infty}[1-F(x)]. \tag{3.34}$$

既然停止损失保费的右导数满足

$$\frac{d}{dt}E[(S-t)_+]=F(t)-1, \tag{3.35}$$

而按照自留额所在的区间分布函数取常数值, 故停止损失保费是逐段线性的. 当 d 取非整数值时停止损失保费的计算可以通过插值法来完成.

利用 Panjer 递归法, 停止损失保费也可以通过递归求得. 事实上, 由 (3.34) 的后一式, 对整数 d,

$$\pi(d):=E[(S-d)_+]=\pi(d-1)-[1-F(d-1)]. \tag{3.36}$$

作为一个例子, 我们取 $S\sim$ 复合 Poisson(1) 分布, 其中 $p(1)=p(2)=\frac{1}{2}$. 于是 Panjer 递推公式 (3.31) 可以被简化为

$$f(x)=\frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}f(x-1)+f(x-2)\right],\quad x=1,2,\cdots, \tag{3.37}$$

初始值为

$$f(0) = e^{-1} \approx 0.368, \quad F(0) = f(0), \quad \pi(0) = E[S] = \lambda\mu_1 = \frac{3}{2}. \tag{3.38}$$

由此，可以得到下表中的计算结果：

x	$f(x) = (3.37)$	$F(x) = F(x-1) + f(x)$	$\pi(x) = \pi(x-1) - 1 + F(x-1)$
0	0.368	0.368	1.500
1	0.184	0.552	0.868
2	0.230	0.782	0.420
3	0.100	0.881	0.201
4	0.070	0.951	0.083
5	0.027	0.978	0.034

∇

注 3.5.5(Panjer 递推式的基于概率母函数的证明)　Panjer 递推还可以通过概率母函数来证明. 对于复合泊松分布，我们可以证明如下. 首先，

$$\frac{dg_S(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{s=0}^{\infty} t^s \Pr[S=s] = \sum_{s=1}^{\infty} st^{s-1} \Pr[S=s]. \tag{3.39}$$

因为

$$g_S(t) = g_N(g_X(t)) = \exp\lambda(g_X(t) - 1), \tag{3.40}$$

(3.39) 的导数也等于 $g'_S(t) = \lambda g_S(t) g'_X(t)$. 对于其它分布来说，类似的表达式可以由 (3.26) 来推得. 现在，代入 $g_S(\cdot)$ 和 $g'_X(\cdot)$ 的级数展开式，得

$$\begin{aligned}
\lambda g_S(t) g'_X(t) &= \lambda \left(\sum_{s=0}^{\infty} t^s \Pr[S=s]\right)\left(\sum_{x=1}^{\infty} xt^{x-1} \Pr[X=x]\right) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \lambda x t^{s+x-1} \Pr[S=s]\Pr[X=x] \\
&= \sum_{x=1}^{\infty}\sum_{v=x}^{\infty} \lambda x t^{v-1} \Pr[S=v-x]\Pr[X=x] \\
&= \sum_{v=1}^{\infty}\sum_{x=1}^{v} \lambda x t^{v-1} \Pr[S=v-x]\Pr[X=x].
\end{aligned} \tag{3.41}$$

比较 (3.39) 和 (3.41) 中项 t^{s-1} 的系数，我们有

$$s\Pr[S=s] = \sum_{x=1}^{s} \lambda x \Pr[S=s-x]\Pr[X=x]. \tag{3.42}$$

这等价于泊松情形下的 Panjer 递推式 (3.31). ∇

注 3.5.6 (使用 Panjer 递推计算卷积) 我们怎样才能利用 Panjer 递推法来计算一个支撑于 $0,1,2,\cdots$ 上的分布的 n 重卷积?

设 $p(0)>0$. 如果我们用 I_iY_i 代替 X_i, 这里 $\Pr[I_i=1]=\Pr[X_i>0]=:p$ 且 $Y_i\sim[X_i|X_i>0]$, 那么 $\sum_i X_i$ 与 $\sum_i I_iY_i$ 同分布, 这样便产生了一个复合二项分布, 其参数值 $p<1$ 满足例 3.5.2 的要求. 另一种方法是在 (3.27) 中取极限 $p\uparrow 1$, 或者等价地对那些产生 $B(k,p)$ 分布的 a 与 b 的值取相应的极限. ∇

§ 3.6 复合分布的近似

上一章介绍的几种逼近方法都是中心极限定理 (即个数庞大的随机变量的和的分布可以用一个正态分布来近似) 的精细表现形式. 当和式的项数是一个取大值的随机变量时这些近似方法仍然有效. 例如, 对于复合泊松分布来说, 如果 λ 较大, 我们有如下形式的中心极限定理; 类似的结论对于复合 (负) 二项分布也成立.

定理 3.6.1(复合泊松分布与中心极限定理) 设 S 服从复合泊松分布, 其参数为 λ, 理赔分布 $P(\cdot)$ 具有有限方差. 记 $\mu=E[S]$ 和 $\sigma^2=\mathrm{Var}[S]$, 则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Pr\left[\frac{S-\mu}{\sigma}\leqslant x\right]=\Phi(x). \tag{3.43}$$

证明 如果 $N_1,N_2,\cdots$ 是一列独立 Poisson(1) 随机变量, X_{ij}, $i=1,2,\cdots$, $j=1,2,\cdots$ 是一列相互独立且具有共同分布 $P(\cdot)$ 的随机变量, 那么对整数值 λ, 有

$$S\sim\sum_{j=1}^{\lambda}\sum_{i=1}^{N_j}X_{ij},\quad 因为\ \sum_{j=1}^{\lambda}N_j\sim N. \tag{3.44}$$

既然 (3.44) 中的 S 是 λ 个独立同分布的随机变量的和, 我们可以直接应用中心极限定理. 注意到在上面取 λ 为整数值的做法是不失一般性的, 这是因为当 λ 很大时对应的分数部分的影响是可以忽略不计的. ∇

为使用近似方法, 我们需要 S 的半不变量. 记 μ_k 为理赔额分布的 k 阶矩, 对于复合泊松分布, 我们有

$$\kappa_S(t)=\lambda(m_X(t)-1)=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\frac{t^k}{k!}. \tag{3.45}$$

由 (2.45) 我们知上式 $\frac{t^k}{k!}$ 的系数即为所需要的半不变量. 于是有

$$E[S]=\lambda\mu_1,\quad \mathrm{Var}[S]=\lambda\mu_2\quad 以及\quad E[(S-E[S])^3]=\lambda\mu_3. \tag{3.46}$$

偏度正比于 $\lambda^{-1/2}$:

$$\gamma_S = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}\sqrt{\lambda}}. \tag{3.47}$$

注 3.6.2(渐近和下溢) 在某些情形下我们不得不求助于一些近似公式, 尤其是实际计算时间过长的时候. 例如当 s 较大时计算 (3.31) 中的 $f(s)$, 我们就需要完成大量的乘法运算 (见习题 §3.5 第 4 题). 其次, 递归法有时可能会使计算 "待在原地不动": 当 $f(0)$ 的数值极端得小, 以致于我们无法分辨它是不是 0(下溢), 则 (3.31) 中所有的概率 $f(s)$ 也将全部为 0. 例如, 如同在一些程序语言中那样我们使用一个 6 字节的实际数据类型, 则当 $\lambda(1-p(0)) \geqslant 88$ 时下溢现象便发生了. 设一个保单组合有 n 个寿险保单构成, 每个保单发生理赔的概率是 0.5%, 当我们计算对应于 $n = 17600$ 的概率 $\Pr[S=0]$ 时就会遭遇下溢现象. 新一代的处理器大大地提高了实际算术运算的精度, 并且可以很容易地处理具有 $\lambda \approx 11340$ 这样大的保单组合, 得到 $\Pr[S=0] \approx 10^{-5000}$.

值得幸运的是, 随着 λ 增大近似的效果会改善; 它们是渐近精确的, 这是因为在极限意义下它们同基于中心极限定理的正态逼近吻合. ▽

§ 3.7 个体和聚合风险模型

从前面几节我们已经看出, 用聚合风险模型替代个体模型在计算上会有一些明显的优势. 本节将集中讨论选择什么样的聚合模型这个问题. 我们考虑寿险中的一种情形, 不过本节内容也适用于非寿险情形 (例如当职员伤残时要进行惩罚 (malus) 的情形).

考虑 n 个一年期寿险保单. 保单 i 导致的理赔有两种可能: 一种可能是被保人死亡了 (其概率为 q_i), 这时理赔额为一个正数 b_i; 另一种可能是被保人没有死亡, 从而理赔额为 0. 我们想利用一个聚合模型来近似所有保单产生的总损失和总收益. 为此, 注意到保单 i 导致赔付 b_i 的次数为 $I_i \sim \text{Bernoulli}(q_i)$ 分布, 我们现在用一个 $\text{Poisson}(\lambda_i)$ 随机变量来替代赔付 b_i 的次数 I_i. 在个体模型中, 考虑理赔总额

$$\widetilde{S} = \sum_{i=1}^{n} I_i b_i, \quad 其中\ \Pr[I_i = 1] = q_i = 1 - \Pr[I_i = 0], \tag{3.48}$$

的分布, 而现在我们考虑如下近似随机变量的分布:

$$S = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad 其中\ Y_i = N_i b_i = \sum_{j=1}^{N_i} b_i \quad 和 \quad N_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i). \tag{3.49}$$

如果取 $\lambda_i = q_i$, 则在两个模型中保单 i 的期望赔付次数相同. 为了安全起见我们也可以取 $\lambda_i = -\log(1-q_i) > q_i$. 这时, 在聚合模型和个体模型下保单 i 发生 0 理赔

的概率相等. 这样, 我们通过使用比原先模型下更大的理赔总额而并入了一些隐含的差额 (参阅例 10.4.1).

尽管 (3.49) 仍然具有个体模型的形式, 由定理 3.4.1 可知 S 服从复合泊松分布, S 对应于一个由 (3.1) 表示的聚合模型, 其参数为

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad 和 \quad P(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} I_{[b_i,\infty)}(x), \tag{3.50}$$

这里 $I_A(x)$ 表示 A 的示性函数 (即当 $x \in A$ 时 $I_A(x) = 1$, 否则为 0). 由此可见, 如果 $\lambda_i = q_i$, 则期望赔付次数保持相等:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} q_i. \tag{3.51}$$

此外, 由 (3.48) 和 (3.49), $\widetilde{S}$ 和 S 的期望也是相等的:

$$E[\widetilde{S}] = \sum_{i=1}^{n} q_i b_i = E[S]. \tag{3.52}$$

至于 S 和 $\widetilde{S}$ 的方差, 我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[S] &= \sum_{i=1}^{n} q_i b_i^2; \\ \mathrm{Var}[\widetilde{S}] &= \sum_{i=1}^{n} q_i(1-q_i) b_i^2 = \mathrm{Var}[S] - \sum_{i=1}^{n} (q_i b_i)^2. \end{aligned} \tag{3.53}$$

可见 S 的方差较大一些. 如果 $\lambda_i = q_i$, 那么使用聚合模型会使得那些风险厌恶型的决策者倾向于采取更为保守的决策, 进一步讨论见第 10 章. 还要注意到 $\sum_{i=1}^{n}(q_i b_i)^2$ 的值越小, 聚合模型与个体模型之间的差异就越小.

注 3.7.1(聚合模型) 个保单组合对应的聚合模型是指形如 (3.50) 的复合泊松分布, 其中 $\lambda_i = q_i$. 我们称之为 *经典* 聚合逼近.

习题 §3.7 第 3 题表明在 (3.48) 下我们也可以通过用 Poisson(1) 个与 X_i 独立同分布的理赔取代每个理赔 X_i 的办法来构造聚合模型. 当随机变量 X_i 比在 (3.48) 中的更一般时, 我们也可以作同样处理. 例如, 设合同 i 分别以概率 $p_0, p_1, \cdots, p_n$ 取值 $b_0 = 0, b_1, b_2, \cdots, b_n$. 于是我们有

$$X_i \equiv I_0 b_0 + I_1 b_1 + \cdots + I_n b_n, \tag{3.54}$$

这里, I_j 的边缘分布满足 $\Pr[I_j = 1] = p_j = 1 - \Pr[I_j = 0]$, 且 $I_0 + I_1 + \cdots + I_n \equiv 1$ (由于 X_i 正好等于一个可能的理赔额). 可以看出, 如果选择经典聚合模型, 我们实际上使用了服从复合泊松分布的随机变量

$$Y_i = N_0 b_0 + N_1 b_1 + \cdots + N_n b_n \tag{3.55}$$

来取代 X_i, (3.55) 中的 N_j 是一些独立的 Poisson(p_j) 随机变量. 以这种方式, 所有理赔的期望发生次数保持不变. ∇

注 3.7.2(开放保单组合的模型)　上面建议的第二个 (取参数值 $\lambda_i = -\log(1-q_i)$ 的) 模型可以被用来模拟一个开放的保单组合, 其到来 (entries) 和离开 (exits) 不是发生在更新时刻. 设对某个保单, 其死亡等待时间 W 服从指数 Exp(β) 分布. 为使得事件 "没有理赔发生" 的概率等于预期值 $1-q$, 必须有 $\Pr[W>1]=1-q$, 即 $\beta=-\log(1-q)$. 现在设每次在死亡时刻该保单被更换为另一个同样的保单. 于是, 我们真正为我们的保单组合建立了一个开放的模型. 死亡等待时间总是服从指数 Exp(β) 分布. 但是由泊松过程的理论 (见习题 §2.5 第 7 题) 在时刻 1 之前的死亡数服从 Poisson(β) 分布. 在该模型中, 对每一个 i, 把对保单 i 的赔付额替换为其 Poisson($-\log(1-q_i)$) 个复制. 这样, 作为对个体模型的近似, 我们便得到了一个更安全的 开放 聚合模型 (见习题 §10.4 第 1 题). ∇

注 3.7.3(负风险额)　如果 b_i 是一些正整数, 那么利用 Panjer 递推法可以很快求出 S 的概率分布, 从而很快得到 $\widetilde{S}$ 的概率分布的近似值. 但是, 当 b_i 既可能为正又可能为负时, 我们就不能够使用这个递推法. 在这种情况下, 我们可以把 S 分割成两部分 $S=S^+-S^-$, 其中 S^+(对应于 $b_i \geqslant 0$) 刚好是 (3.49) 中那些项 Y_i 的和. 由定理 3.4.2 易见, S^+ 和 S^- 都是由非负项构成的独立的复合泊松随机变量. 进而 S 的分布可以通过对 S^+ 和 S^- 的分布作卷积来求得.

如果欲只对一个 d 值来计算停止损失保费 $E[(S-d)_+]$, 那么可以省去计算 S^+ 和 S^- 的分布卷积的时间. 通过对负值理赔总额 S^- 取条件, 我们可以把停止损失保费改写为如下形式:

$$E[(S-d)_+] = \sum_{x\geqslant 0} E[(S^+-(x+d))_+]\Pr[S^-=x]. \tag{3.56}$$

为计算这个值, 我们只需要计算 S^+ 的停止损失保费即可, 而 S^+ 的停止损失保费 (作为 Panjer 递归的一个副产品) 可以由 Panjer 递归得到 (见例 3.5.4). 最后, 预期的停止损失保费由简单的加法运算便可以求出. 对于卷积来说, 双重求和是必须的. ∇

§3.8　几个理赔额分布的参数族

对于一个机动车险的保单组合, 我们可以使用一个聚合风险模型, 其泊松参数取为前几年理赔次数的平均数, 再由保单数目的变化趋势进行调整. 个体理赔额分布可以根据在过去观测到的分布来进行估计, 再根据通货膨胀进行调整.

在有些情况下 (例如计算保费的免赔额), 使用一个能够较好拟合观测到的理赔额数据的参数分布就会很方便. 我们常用如下一些非负随机变量的概率分布:

1. 伽玛分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$: 适用于理赔分布的尾概率不是太 "重" 情形，例如在机动车险中保对自己车辆损伤情况；

2. 对数正态分布 $\mathrm{LN}(\mu,\sigma^2)$: 适用于理赔分布的尾概率略微重一些的情形，例如火险中的理赔额；

3. $\mathrm{Pareto}(\alpha,x_0)$ 分布：在发生大理赔的可能性很大时用这个分布，特别是在责任险中.

在习题中，我们将推导出上述这些分布的一些有用的性质. 除了上述分布之外，还有许多其它的分布可以使用. 例如，逆高斯分布以及指数分布的混合/组合.

逆高斯分布 [♠]

出于一些原因，逆高斯分布有时意想不到地出现在精算文献中. 它具有类似于上述分布的一些性质. 多种参数化手法可以供使用. 我们将使用一个具有形状参数 α 和刻度参数 β 的逆高斯分布 (记为 $\mathrm{IG}(\alpha,\beta)$), 其类似于伽玛分布. 由于在数学上处理起来困难，逆高斯分布一直没有受到太多关注. 例如，即使要证明其概率密度函数的积分值等于 1 都是一件困难的事情. 最方便的办法是考虑其在 $x\in(0,\infty)$ 上定义的分布函数

$$F(x;\alpha,\beta)=\Phi\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{\beta x}}+\sqrt{\beta x}\right)+e^{2\alpha}\Phi\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{\beta x}}-\sqrt{\beta x}\right). \tag{3.57}$$

注意到当 $x\downarrow 0$ 时其极限为 0; 而当 $x\to\infty$ 时其极限为 1. 导数在 $(0,\infty)$ 上取正值，具有如下形式：

$$f(x;\alpha,\beta)=\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\beta}}x^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{(\alpha-\beta x)^2}{2\beta x}},\quad x>0. \tag{3.58}$$

所以 (3.57) 确实是一个分布函数. 运用 (3.58) 是一个密度函数这个事实，我们可以证明 $F(x;\alpha,\beta)$ 的矩母函数等于

$$m(t;\alpha,\beta)=\exp\left\{\alpha\left[1-\sqrt{1-\frac{2t}{\beta}}\right]\right\},\quad t\leqslant\frac{\beta}{2}. \tag{3.59}$$

该矩母函数在 $t=\frac{\beta}{2}$ 处有穷，而在 $t>\frac{\beta}{2}$ 处无穷. "逆高斯" 这个名字源于其累积量函数是正态分布累积量母函数的反函数.

当 $\alpha=\beta$ 时，逆高斯分布也被称为 Wald 分布. 利用矩母函数容易证明 β 确实是一个刻度参数，事实上，如果 X 服从 $\mathrm{IG}(\alpha,\beta)$ 分布，那么 βX 服从 $\mathrm{IG}(\alpha,1)$ 分布. 我们还可以看出，把两个独立的服从参数分别为 α_1,β 和 α_2,β 的逆高斯分布的随机变量相加，便得到一个服从参数为 $\alpha_1+\alpha_2,\beta$ 的逆高斯分布的随机变量. $\mathrm{IG}(\alpha,\beta)$ 分布的期望和方差分别为 α/β 和 α/β^2, 与伽玛分布类似；斜度为 $3/\sqrt{\alpha}$, 略大于具有同样期望和方差的伽玛分布 的偏度. 图 3.1 描绘了逆高斯分布的图像由非常倾斜到几乎正态的变化趋势 (这里所有被刻画的分布具有相同的期望值 1).

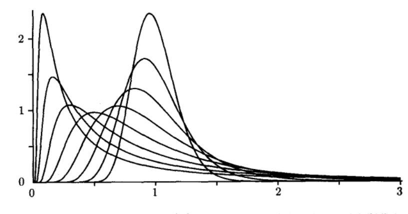


图 3.1　参数值分别为 $\alpha=\beta=\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,4,8,16,32$ (从左到右) 的逆高斯分布

指数分布的混合 / 组合

还有另外一些有用的参数分布，它们是指数分布的混合 / 组合，我们有时候也称之为 Coxian 分布. 如果一个指数分布的参数是随机的，分别以概率 q 和 $1-q$ 取值于 α 和 β, 那么一个 混合 指数分布便产生了. 该混合指数分布的密度函数为

$$p(x)=q\alpha e^{-\alpha x}+(1-q)\beta e^{-\beta x},\quad x>0. \tag{3.60}$$

对每一个 q, $0\leqslant q\leqslant 1$, 函数 $p(\cdot)$ 是一个概率密度函数. 不过当 $q<0$ 或者 $q>1$ 时, (3.60) 中的 $p(\cdot)$ 有时仍然是一个概率密度函数. 当然，此时不等式 $p(x)\geqslant 0$ 必须对所有的 x 成立. 由习题 §3.8 第 4 题知这只需要 $p(0)\geqslant 0$ 即可. 如果 $\alpha<\beta$, 那么 $p(0)\geqslant 0$ 等价于 $1<q\leqslant\beta/(\beta-\alpha)$, 并且此时我们称 (3.60) 为指数分布的一个组合.

指数分布的一个组合例子如下：

$$p(x)=2(e^{-x}-e^{-2x})=2\times 1e^{-1x}-1\times 2e^{-2x}, \tag{3.61}$$

即 $q=2$, $\alpha=1$ 且 $\beta=2$. 另一个这样的例子是函数

$$p(x)=\frac{4}{3}\left(e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)=\frac{4}{3}\times 1e^{-1x}-\frac{1}{3}\times 2e^{-2x}. \tag{3.62}$$

如果 $X\sim\text{Exp}(\alpha)$, $Y\sim\text{Exp}(\beta)$, 且 $\alpha\neq\beta$, 则

$$m_{X+Y}(t)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha-t)(\beta-t)}=\frac{\beta}{\beta-\alpha}\frac{\alpha}{\alpha-t}-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\frac{\beta}{\beta-t}, \tag{3.63}$$

所以独立指数型随机变量之和具有指数分布组合的密度函数. 不过，反之未必正确. 例如在 (3.61) 中，由于 $q=\beta/(\beta-\alpha)=2$, 故 (3.61) 是 Exp(1) 和 Exp(2) 分布的卷积的概率密度函数，而 (3.62) 中的概率密度函数不可以写成这样的卷积.

当 $\alpha \uparrow \beta$ 时，有 $\beta/(\beta-\alpha) \to \infty$, 从而 $X+Y$ 的分布趋向于 $\Gamma(2,\beta)$ 分布. 于是，具有参数值 $r=2$ 的伽玛分布是指数分布组合的极限，同样的结论对所有刻度参数取整数值的伽玛分布也成立.

有这样一个两阶段模型，它可以产生 *所有* 的具有概率密度函数 (3.60) 那样的随机变量. 设 X, Y 和 I 相互独立， X 和 $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$, $I \sim \mathrm{Bernoulli}(\gamma)$ 分布， 其中 $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, 又设 $0<\alpha<\beta$. 于是随机变量

$$Z = I\frac{X}{\alpha} + \frac{Y}{\beta} \tag{3.64}$$

具有如下的矩母函数

$$m_Z(t) = \left(1-\gamma+\gamma\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)\frac{\beta}{\beta-t} = \frac{\alpha\beta - t\beta(1-\gamma)}{(\alpha-t)(\beta-t)}. \tag{3.65}$$

为了证明这是一个指数分布混合或者组合的矩母函数，我们只需要设法利用部分分数法找到一个 q 使得 (3.65) 等于 (3.60) 的矩母函数

$$q\frac{\alpha}{\alpha-t} + (1-q)\frac{\beta}{\beta-t} \tag{3.66}$$

即可. 比较 (3.65) 和 (3.66) 得到

$$q\alpha + (1-q)\beta = \beta(1-\gamma), \quad 从而 \quad q = \frac{\beta\gamma}{\beta-\alpha}. \tag{3.67}$$

既然 $0<\alpha<\beta$, 当 $0 \leqslant \gamma \leqslant 1-\alpha/\beta$ 时，我们有 $0 \leqslant q \leqslant 1$, 于是 Z 是一个指数分布的混合. 当 $1-\alpha/\beta < \gamma \leqslant 1$ 时，有 $q>1$, 这时 Z 服从一个组合指数分布. (3.64) 中的损失变量 Z 可以看作如下一个实验的结果：首先，在任何情况下某人都要承受一个损失 Y/β; 其次，通过投掷一枚硬币观察是否正面朝上 (正面朝上的概率为 γ), 以此来决定该人是否要承受另外一个损失 X/α, 这样此人的总损失由 (3.64) 给出. 该损失变量 Z 的另一个解释是要么承受损失 Y/β, 要么承受损失 $X/\alpha + Y/\beta$, 这是因为 $Z = I(X/\alpha + Y/\beta) + (1-I)Y/\beta$. 当 $\gamma = 1$ 时，两个指数分布的和再一次出现了.

§ 3.9 停止损失保险与近似

对于自留额为 d 的停止损失再保险， 再保商对损失 S 的赔付额等于 $(S-d)_+$. 本节我们要对几个分布函数来寻求其停止损失保费的解析表达式. 这些停止损失保费表达式也可以被用来计算超额损失再保险的纯保费.

用 $\pi(d)$ 来表示一个具有分布函数 $F(\cdot)$ 的损失变量的停止损失保费为 d 的一个函数，于是 $\pi'(d+0) = F(d) - 1$. 这个事实可以被用来验证停止损失保费的表达式. 在一些必要的积分运算中，我们常常使用分部积分法.

例 3.9.1(正态分布的停止损失保费)　设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 分布，那么 X 的取自留额 d 的停止损失保费等于多少？

对于非标准正态分布，我们通常是先考虑特殊情形 $\mu = 0$ 和 $\sigma^2 = 1$, 再利用一个事实：如果 $U \sim N(0,1)$, 则 $X = \sigma U + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$. 于是所要计算的停止损失保费为

$$E[(X-d)_+] = E[(\sigma U + \mu - d)_+] = \sigma E\left[\left(U - \frac{d-\mu}{\sigma}\right)_+\right]. \tag{3.68}$$

因为 $\phi'(u) = -u\phi(u)$, 我们有

$$\int_t^\infty u\phi(u)du = \int_t^\infty [-\phi'(u)]du = \phi(t). \tag{3.69}$$

于是立即得到

$$\pi(t) = E[(U-t)_+] = \phi(t) - t[1 - \Phi(t)], \tag{3.70}$$

从而

$$E[(X-d)_+] = \sigma\phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - (d-\mu)\left[1 - \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)\right]. \tag{3.71}$$

下面例 3.9.5 给出了一个正态分布停止损失保费数值的表格，也可见书末的表 C. ∇

例 3.9.2(伽玛分布)　对伽玛分布来说，其停止损失保费表达式就颇为简单了．如果 $S \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, 用 $G(\cdot; \alpha, \beta)$ 表示 S 的概率分布函数，则

$$E[(S-d)_+] = \frac{\alpha}{\beta}[1 - G(d; \alpha+1, \beta)] - d[1 - G(d; \alpha, \beta)]. \tag{3.72}$$

我们还可以推导出停止损失赔付的更高阶矩 $E[(S-d)_+^k]$, $k = 2, 3, \cdots$. 甚至于其矩母函数 (从而停止损失赔付的指数保费) 也可以类似地计算出来.　∇

注 3.9.3(自留损失的矩)　当 $S \leqslant d$ 时，$(S-d)_+ = 0$; 而当 $S > d$ 时，$(S-d)_+ = S - d$. 于是下面的等式恒成立：

$$[(S-d) - (S-d)_+][(S-d)_+] \equiv 0. \tag{3.73}$$

从而有

$$\begin{aligned}\{S-d\}^k &\equiv \{[S-d-(S-d)_+] + (S-d)_+\}^k \\ &\equiv \{S-d-(S-d)_+\}^k + \{(S-d)_+\}^k,\end{aligned} \tag{3.74}$$

在 (3.74) 的最后一步中，由 (3.73) 知二项展开式中其余的项均为 0. 利用这些恒等式，我们可以推导出在停止损失赔付下自留损失 $S - (S-d)_+$ 的矩.　∇

如果损失近似服从一个平移伽玛分布，用同样的方式也可以近似求出自留损失的期望值、方差以及偏度 (见习题 §3.9 第 4 题).

例 3.9.4(停止损失保费的 NP 近似) 对于某些随机变量，$\{X > y\}$ 的概率用 NP 法来近似的效果会相当好. 那么可否对 X 的停止损失保费也给出一个近似呢？

对 $u \geqslant 1$ 和 $y \geqslant 1$, 定义如下一个辅助函数：

$$q(u) = u + \frac{\gamma}{6}(u^2 - 1) \quad \text{和} \quad w(y) = \sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + \frac{6y}{\gamma} + 1} - \frac{3}{\gamma}. \tag{3.75}$$

由 2.5 节，我们知道 $w(q(u)) = u$ 和 $q(w(y)) = y$. 进一步，$q(\cdot)$ 和 $w(\cdot)$ 都是单调增的，并且 $q(u) \geqslant y \Leftrightarrow w(y) \leqslant u$. 设 Z 是一个具有均值 0, 标准差 1 和偏度 $\gamma > 0$ 的随机变量. 我们要在 (3.68) 的帮助下，利用 Z 的停止损失保费来计算一个满足 $E[X] = \mu$, $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$ 和斜度为 γ 的随机变量 X 的停止损失保费.

NP 近似为

$$\Pr[Z > q(u)] = \Pr[w(Z) > u] \approx 1 - \Phi(u), \quad u \geqslant 1. \tag{3.76}$$

设 $U \sim N(0,1)$, 定义另一个随机变量 V 如下：当 $U \geqslant 1$ 时，$V = q(U)$; 否则，$V = 1$, 即 $V = q(\max\{U, 1\})$. 于是

$$\Pr[V > q(u)] = \Pr[U > u] = 1 - \Phi(u), \quad u \geqslant 1. \tag{3.77}$$

因而，

$$\Pr[Z > y] \approx \Pr[V > y] = 1 - \Phi(w(y)), \quad y \geqslant 1. \tag{3.78}$$

Z 当 $d > 1$ 时的停止损失保费可以通过 V 的停止损失保费来近似. 事实上，

$$\begin{aligned}\int_d^\infty \Pr[Z > y]dy &\approx \int_d^\infty \Pr[V > y]dy = E[(V - d)_+] \\ &= \int_{-\infty}^\infty (q(\max\{u, 1\}) - d)_+ \phi(u)du \\ &= \int_{w(d)}^\infty (q(u) - d)\phi(u)du.\end{aligned} \tag{3.79}$$

为了计算该积分，利用 $\frac{d}{du}[u\phi(u)] = (1 - u^2)\phi(u)$ 推出

$$\int_t^\infty [u^2 - 1]\phi(u)du = t\phi(t). \tag{3.80}$$

把关系式 (3.69) 和 (3.80) 以及函数 $q(\cdot)$ 代入 (3.79), 得到

$$\begin{aligned}E[(Z - d)_+] &\approx \int_{w(d)}^\infty \left(u + \frac{\gamma}{6}(u^2 - 1) - d\right)\phi(u)du \\ &= \phi(w(d)) + \frac{\gamma}{6}w(d)\phi(w(d)) - d[1 - \Phi(w(d))].\end{aligned} \tag{3.81}$$

这给出了任何一个满足期望为 0, 方差为 1 且偏度为 γ 的风险变量 Z 的净停止损失保费的近似公式. ▽

例 3.9.5(CLT 和 NP 停止损失近似的比较) 求满足 $E[X]=\mu=0$, $\mathrm{Var}[X]=\sigma^2=1$ 以及偏度分别为 $\gamma=0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,4$ 的随机变量 X 的停止损失保费的近似值, 自留额分别取为 $d=0,\frac{1}{2},\cdots,4$.

当偏度为 0 时, 使用公式 (3.71), 否则使用公式 (3.81). 尽管 (3.81) 是对 $d\geqslant 1$ 情形推导出来的, 但对 $d=0$ 和 $d=\frac{1}{2}$ 情形, 我们同样使用该公式. 计算出的结果为:

d	$\gamma=0$	$\gamma=1/4$	$\gamma=1/2$	$\gamma=1$	$\gamma=2$	$\gamma=4$
0.0	.3989	.3993	.4003	.4044	.4195	.4694
0.5	.1978	.2053	.2131	.2294	.2642	.3385
1.0	.0833	.0934	.1035	.1236	.1640	.2446
1.5	.0293	.0376	.0461	.0637	.1005	.1769
2.0	.0085	.0134	.0189	.0316	.0609	.1280
2.5	.0020	.0042	.0072	.0151	.0365	.0926
3.0	.0004	.0012	.0026	.0070	.0217	.0670
3.5	.0001	.0003	.0009	.0032	.0128	.0484
4.0	.0000	.0001	.0003	.0014	.0075	.0350

可见一个正的偏度会导致一个大得多的停止损失保费. 对任意的 μ 和 σ, 我们不得不使用 (3.68). 此时, 首先确定 $d=(t-\mu)/\sigma$, 然后把上表中对应的停止损失保费乘以 σ, 并且必要时使用插值. ▽

例 3.9.6(平移伽玛分布的停止损失保费) 用平移伽玛近似法求上例中的那些停止损失保费.

期望为 0, 方差为 1 和偏度为 γ 的平移伽玛分布随机变量的参数值分别是 $\alpha=4/\gamma^2$, $\beta=2/\gamma$ 和 $x_0=-2/\gamma$. 当 $\gamma\downarrow 0$ 时, (3.72) 给出 $N(0,1)$ 分布的停止损失保费. 所有的伽玛停止损失保费都略小于用 NP 近似得到的停止损失保费. 实际上, 由 (2.60) 可以看出当 $d<\mu+\sigma$ 时伽玛近似的尾概率确实小于 NP 近似的尾概率. 只是当偏度 $\gamma=4$ 时差别会更大一些.

当 d 很小时, 下表中的结果看起来似乎不正确. 尽管近似公式 (3.81) 是在 $d\geqslant 1$ 下推导出来的, 鉴于其近似结果随着斜度的增加而增加, 当 $d=0$ 和 $d=0.5$ 时近似公式 (3.81) 给出的结果似乎更可信一些. 不过, 由下文的 (3.83) 即可得到, 如果一个分布的所有停止损失保费都大于另一个具有相同期望值的分布的停止损失保费, 那么前一个分布会有更大的方差. 既然在本例中分布的方差是相等的, 可见除了有较大的平移伽玛停止损失保费外, 也应该有一些较小的平移伽玛停止损失保

费才对.

d	$\gamma=0$	$\gamma=1/4$	$\gamma=1/2$	$\gamma=1$	$\gamma=2$	$\gamma=4$
0.0	.3989	.3984	.3969	.3907	.3679	.3038
0.5	.1978	.2046	.2103	.2184	.2231	.2046
1.0	.0833	.0930	.1017	.1165	.1353	.1424
1.5	.0293	.0374	.0453	.0598	.0821	.1011
2.0	.0085	.0133	.0186	.0297	.0498	.0726
2.5	.0020	.0042	.0072	.0144	.0302	.0527
3.0	.0004	.0012	.0026	.0068	.0183	.0385
3.5	.0001	.0003	.0009	.0032	.0111	.0283
4.0	.0000	.0001	.0003	.0015	.0067	.0209

平移伽玛近似是对一个具有适当期望值和方差的风险变量计算其停止损失保费的. 另一方面, NP 近似是对一个在超过 $\mu+\sigma$ 处具有适当尾概率的随机变量计算其停止损失保费的. 显然, 同时具有 NP 尾概率和合适的前三阶矩的随机变量是存在的. ∇

§ 3.10 方差不等情形下的停止损失保费

本节比较期望值相等而方差不等的两个风险变量的停止损失保费. 尽管我们不可能给出一个准确的一般准则, 但是可以陈述一些有用的近似结果.

就像对分布函数的积分得到期望值那样, 我们还可以对停止损失保费积分. 在习题 §3.10 第 1 题中, 我们请读者证明: 如果以概率 1 有 $U \geqslant 0$, 那么

$$\frac{1}{2}\mathrm{Var}[U] = \int_0^\infty \{E[(U-t)_+] - (\mu-t)_+\}dt. \tag{3.82}$$

这个方程里的被积函数总是非负的. 由 (3.82) 得, 如果 U 和 W 是两个具有相同期望值 μ 的风险变量, 那么

$$\int_0^\infty \{E[(U-t)_+] - E[(W-t)_+]\}dt = \frac{1}{2}\{\mathrm{Var}[U] - \mathrm{Var}[W]\}. \tag{3.83}$$

通过使用区间宽度为 1 的梯形公式近似 (3.83) 中的积分, 我们得到下面这个关于 U 和 W 的停止损失保费所有差额总和的近似结果 (请注意不要使用绝对值):

$$\sum_{i=1}^{\infty}\{E[(U-i)_+] - E[(W-i)_+]\} \approx \frac{1}{2}\{\mathrm{Var}[U] - \mathrm{Var}[W]\}. \tag{3.84}$$

因此，当我们用 W 的停止损失保费来替代 U 的实际停止损失保费时，(3.84) 给出了在所有整数值处停止损失保费的误差总和的一个近似结果. 在第 10 章我们要给出一些使得不等式 $E[(U-d)_+] \geqslant E[(W-d)_+]$ 对所有的 d 成立的条件. 在此情况下，(3.84) 中所有的被加项均为正，从而所有这些项的最大误差将小于右边.

假设两个被积函数的比值近似等于其对应积分的比值有时也未必就太不合理. 在此假设下，(3.82) 给出了近似公式

$$\frac{E[(U-t)_+]-(\mu-t)_+}{E[(W-t)_+]-(\mu-t)_+} \approx \frac{\mathrm{Var}[U]}{\mathrm{Var}[W]}. \tag{3.85}$$

如果 $\mu = E[U]$, $W = (1-I)\mu + IU$, 其中 $I \sim \mathrm{Bernoulli}(\alpha)$ 且独立于 U, $\alpha = \mathrm{Var}[W]/\mathrm{Var}[U]$, 那么该近似公式是精确的 (见习题 §3.10 第 2 题).

如果 $t \geqslant \mu$, 则 $(\mu-t)_+ = 0$, 所以近似公式 (3.85) 简化为如下的经验法则.

经验法则 3.10.1(停止损失保费的比) 当自留额 t 大于期望值 $\mu = E[U] = E[W]$ 时，风险变量 U 和 W 的停止损失保费满足:

$$\frac{E[(U-t)_+]}{E[(W-t)_+]} \approx \frac{\mathrm{Var}[U]}{\mathrm{Var}[W]}. \tag{3.86}$$

当 t 的值既不太大也不太小时该法则运行效果很好，详见下文. ∇

例 3.10.2("不明确配偶情况") 习题 §3.7 第 4 题处理了人寿保险中的一种情形，在此情形下保险商不知道究竟哪一位被保险人死后会留下一个寡妇，从而必须赔付该寡妇的保险抚恤金. 如果被保险人中已婚的频率为 80%, 那么我们或者把所有的风险额乘上 0.8 而保持一年内死亡的概率不变，或者把死亡概率乘上 0.8 而保持赔付额不变. 可以证明，在前一种处理办法下得到的方差大约等于在后一种处理办法下得到的方差的 80%. 所以，如果我们没有用正确的方法，而是用上述前一种方法来计算停止损失保费，那么对于那些比期望理赔大的自留额来说，其停止损失保费就会大约少 20%. ∇

我们将对 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布来检验经验法则 3.10.1, 其中参数 μ 和 σ^2 固定. 记 $\pi(d;\mu,\sigma^2)$ 为服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布的随机变量的停止损失保费，$\pi(\cdot) = \pi(\cdot;0,1)$, 再记 $\Phi(\cdot)$ 为 $N(0,1)$ 的分布函数，$\phi(\cdot) = \Phi'(\cdot)$ 为相应的概率密度函数. (3.71) 可以改写如下:

$$\pi(d;\mu,\sigma^2) = \sigma\pi(d^*;0,1) = \sigma[\phi(d^*) - d^*(1-\Phi(d^*))], \tag{3.87}$$

其中 $d^* = (d-\mu)/\sigma$. 为了研究当 σ^2 改变而 μ 固定时函数 $\pi(d;\mu,\sigma^2)$ 的变化趋势，对 σ^2 求偏导得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\pi(d;\mu,\sigma^2) &= \frac{1}{2\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\sigma\pi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)\\ &= \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sigma\pi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) + (d-\mu)\left\{1-\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right].\end{aligned} \tag{3.88}$$

于是，如果我们用 $\sigma^2+\delta^2$ 来替代 σ^2, 其中 δ 为较小的量，则该替代对停止损失保费的影响可以被粗略地刻画如下：

$$\begin{aligned}
&\pi(d;\mu,\sigma^2+\delta^2)\\
&\approx \pi(d;\mu,\sigma^2)+\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\left[\sigma\pi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)+(d-\mu)\left\{1-\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right]\\
&=\frac{\sigma^2+\delta^2}{\sigma^2}\pi(d;\mu,\sigma^2)+\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\left[(d-\mu)\left\{1-\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)\right\}-\sigma\pi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)\right]. \quad (3.89)
\end{aligned}$$

(3.89) 的第一项恰好是经验法则刻画的那个比值. 可以证明，第二项在 $d\in[\mu,\infty)$ 上积分值等于 0, 该项在 d 接近于 μ 时为负，在 $d\approx 0.745$ 时为 0, 而在 d 取大值时为正. 由此可以总结出当自留额大约为 $\mu+\frac{3}{4}\sigma$ 时，经验法则运行效果会非常好.

例 3.10.3(经验法则的数值评估) 我们对自留额 $d=0,\frac{1}{2},1,\cdots,3$ 分别计算 $N(0,1.01)$ 和 $N(0,1.25)$ 的停止损失保费，并与 $N(0,1)$ 的对应结果进行比较. 按照经验法则 3.10.1, 前两个分布的计算结果应当分别为 $N(0,1)$ 对应的结果的 1.01 倍和 1.25 倍大. 表 3.1 给出一些修正因子，为了得到真正的误差这些因子必须被乘进去. 例如，在 $d=0$ 时比值 $\pi(d;0,1.01)/\pi(d;0,1)$ 等于 1.005, 而不是 1.01, 所以对应的误差只是经验法则预测误差的 50%.

表 3.1 根据经验法则，$N(0,1.01)$ 和 $N(0,1.25)$ 的停止损失保费相对于 $N(0,1)$ 的停止损失保费的偏离因子

d	$\pi(d;0,1)$	修正因子	
		$1+0.01\times$	$1+0.25\times$
0.0	0.39894	0.50	0.47
0.5	0.19780	0.89	0.85
1.0	0.08332	1.45	1.45
1.5	0.02931	2.22	2.35
2.0	0.00849	3.20	3.73
2.5	0.00200	4.43	5.84
3.0	0.00038	5.92	9.10

我们可以看到，当自留额接近于期望值时，经验法则修正因子会过大； 当自留额较大时，该修正因子又会过小. 只有当自留额接近于期望值加上标准差的 0.75 倍时，修正因子才基本正确. 当一个分布具有较小的方差而自留额又较大时，停止损失保费基本上可以忽略不计，这时经验法则修正因子就会有较大的误差，不过当分布的方差较大时就不一定了.

如果我们想从经验法则中再挤出一点精度的话，我们可以从表 3.1 中发现一个

恰当的修正因子. 例如, 假设风险变量的分布类似于正态分布, 如果自留额等于 $\mu+\sigma$ 且方差比值等于 $1+\delta$, 那么我们必须对计算出来的停止损失保费乘上一个因子 $1+1.45\delta$ 来近似真正的停止损失保费. ∇

§3.11 习　题

§3.2

1. 当 N 有如下分布的时候, 计算 (3.3), (3.4) 和 (3.5): a) Poisson(λ) 分布, b) $B(n,p)$ 分布, c) NB(r,p) 分布.

2. 对于累积量母函数, 给出类似于 (3.5) 的推导.

3. 设有一个鸟窝, 里面的鸟蛋数服从 Poisson(λ) 分布, 又设孵化出一只雌鸟的概率等于 p. 求鸟窝中雌鸟个数的分布.

4. 设 S 服从复合泊松分布, 其中 $\lambda=2$, $p(x)=x/10$, $x=1,2,3,4$. 对 $s\leqslant 4$, 利用 (3.10) 来计算事件 $S=s$ 的概率.

5. 对 $x=0,\cdots,6$, 完成例 3.2.2 中的表格, 并求 N, X 和 S 的期望值和方差.

6. 设 S 由例 3.2.2 给出, 但是现在 N 服从参数为 $\lambda=2$ 的泊松分布, 求 S 的期望值和方差.

7. 用分部积分法证明关系式 (3.11). 再用以下办法证明该式: 对方程两边求导, 比较当 $x=0$ 或 $x\to\infty$ 时方程两边值.

§3.3

1. 考虑 NB(r,p) 分布, 令 $r\to\infty$ 和 $p\to 1$, 但是 $r(1-p)=\lambda$ 保持不变. 证明在该极限过程下负二项分布收敛于泊松分布.

2. 在什么情况下通常的泊松分布可以取代例 3.3.1 和 3.3.2 中的负二项分布?

3. [♠] 证明 (3.19).

§3.4

1. 同习题 §3.2 第 4 题, 但是现在要求用稀疏向量算法.

2. 如果在 (3.22) 中一些 x_i 是相等的, 那么 (3.23) 会怎么样?

3. 设 S_1 服从复合泊松分布, 其参数 $\lambda_1=4$, 理赔分布 $p_1(j)=\frac{1}{4}, j=0,1,2,3$, 再设 S_2 也服从复合泊松分布, 其参数 $\lambda_2=2$, 理赔分布 $p_2(j)=\frac{1}{2}, j=2,4$. 如果 S_1 和 S_2 独立, 那么 S_1+S_2 服从什么分布?

4. 在习题 §3.2 第 3 题中, 证明雄鸟和雌鸟的数目相互独立.

5. 记 N_j 为例 3.2.2 中理赔额等于 j 的发生次数, $j=1,2$. 试问 N_1 和 N_2 独立吗?

6. 设 S 服从复合泊松分布, 其参数为 λ, 离散理赔分布为 $p(x)$, $x>0$. 再设 S_0 也服从复合泊松分布, 其参数为 $\lambda_0=\lambda/\alpha$, $0<\alpha<1$, 理赔分布 $p_0(x)$ 满足 $p_0(0)=1-\alpha$ 和 $p_0(x)=\alpha p(x)$, $x>0$. 用矩母函数的方法证明 S 和 S_0 同分布. 再通过验证 (3.22) 中理赔额 $x\neq 0$ 的发生次数同分布的方法来证明 $S\sim S_0$.

§3.5

1. 同习题 §3.2 第 4 题, 但是现在要求用 Panjer 递推公式.

2. 同习题 §3.4 第 6 题的第一部分, 但是现在要求通过归纳 "Panjer 递归给出同样的概率 $f(s)$" 来证明.

3. 验证例 3.5.2.

4. 设一个复合泊松分布, 其理赔分布在 $1, 2, \cdots, m$ 处取正概率, 求在用 Panjer 递推计算概率 $F(t)$ 时需要用到的乘法运算次数. 区分 $m < t$ 和 $m \geqslant t$ 两种情况.

5. 设 $q_n = \Pr[N = n]$ 满足 (3.26), 求证 $E[N] = (a+b)/(1-a)$.

6. 在例 3.5.4 中, 求使得 $\pi(d) = 0.3$ 的自留额 d.

7. 设 N_1, N_2 和 N_3 相互独立且服从 Poisson(1) 分布. 对自留额 $d = 2.5$, 求 $E[(N_1 + 2N_2 + 3N_3 - d)_+]$.

8. 设 S_1 服从复合泊松分布, 其参数 $\lambda = 2$, 理赔分布 $p(1) = p(3) = \frac{1}{2}$. 记 $S_2 = S_1 + N$, 其中 N 服从 Poisson(1) 分布且独立于 S_1. 求 S_2 的矩母函数. 对应的分布函数是什么? 求概率 $\Pr[S_2 \leqslant 2.4]$, 解中保留 e 的方幂.

9. 设 Z 是一个服从复合泊松分布的整值随机变量. 如果对某 $\alpha > 0$, Panjer 递推公式等于 $\Pr[Z = s] = f(s) = \frac{\alpha}{s}[f(s-1) + 2f(s-2)]$, $s = 1, 2, 3, \cdots$, 求该复合泊松分布的参数值. (不要忘记 $p(0) \neq 0$ 的情况 !)

10. 设 S 服从复合泊松分布, 其参数 $\lambda = 3$, 理赔分布满足 $p(1) = \frac{5}{6}$ 和 $p(2) = \frac{1}{6}$. 对 $x = 0, 1, 2, \cdots$ 计算 $f(x)$, $F(x)$ 和 $\pi(x)$. 同时计算 $\pi(2.5)$.

11. 从 (3.34) 推导出停止损失保费的计算公式, 要求只用到 $f(0), f(1), \cdots, f(d-1)$ 或者 $F(0), F(1), \cdots, F(d-1)$.

12. 给出一个类似于 (3.36) 的公式来计算 $E[(S-d)_+^2]$.

§3.6

1. 设 S 服从复合泊松分布, 其参数 $\lambda = 12$, 理赔分布是 $U(0,1)$. 试用中心极限定理, 平移伽玛近似法以及 NP 近似法来计算概率 $\Pr[S < 10]$.

2. 设 S 服从复合泊松分布, 其参数 $\lambda = 10$, 理赔分布为 χ_4^2 分布. 试用平移伽玛近似法来计算 S 的分布函数, 并用 NP 近似法来估计使得 $F_S(s) \approx 0.95$ 成立的分位数 s 以及概率 $F_S(E[S] + 3\sqrt{\mathrm{Var}[S]})$.

§3.7

1. 试证, 在 (3.49) 中, 与 $\lambda_j = q_j$ 相比, 取 $\lambda_j = -\log(1-q_j)$ 时 S 的期望和方差会更大. 试在两种情况下比较 (3.48) 中的 $\Pr[I_i = j]$ 和 (3.49) 中的 $\Pr[N_i = j]$, $j = 0, 1, 2, \cdots$, 以及 I_i 和 N_i 的分布函数.

2. 设一个保单组合包含 100 个一年期寿险保单, 这些保单按照承保额度 1 和 2 以及本年死亡概率 0.01 和 0.02 均摊. 试求理赔总额 $\widetilde{S}$ 的期望和方差. 选取一个合适的复合泊松随机变量 S 去近似 $\widetilde{S}$, 并比较它们的期望和方差. 当用适当的平移伽玛分布对 S 和 $\widetilde{S}$ 作近似时, 如何选取参数?

3. 通过比较各自的矩母函数来证明下面的关于聚合模型的表述相互等价:

(1) 具有参数 $\lambda = n$ 和理赔分布 $Q(x) = \frac{1}{n}\sum_j \Pr[X_j \leqslant x]$ 的复合泊松分布. (于是 $Q(\cdot)$ 是理赔分布的算术平均数, 可以被解释为来自一个抽取的保单的理赔分布, 其中每个保单被抽到的概率为 $\frac{1}{n}$.)随机

(2) 由 (3.50) 刻画的复合泊松分布，其中 $\lambda_i = q_i$.

(3) 由 (3.49) 刻画的随机变量 $\sum_i N_i b_i$, 其中 $\lambda_i = q_i$.

(4) 随机变量 $Z_1 + \cdots + Z_n$, 其中每个 Z_i 服从参数为 1 理赔与 $I_i b_i$ 同分布的复合泊松分布.

4. 设一个保单组合由 n 个一年期男性人寿保险的保单组成，第 i 个保单持有人本年死亡的概率为 q_i. 假如该保单持有人死亡了，那么保险公司必须赔付一笔抚恤金 b_i, 但是只有在该保单持有人留下一个配偶的情况下赔付才得以实现. 保险商事前并不知道每个保户有没有留下配偶 (“不明确配偶情况”), 不过从一些表格中我们知道对每一个保单来说这个概率等于 80%. 在此情况下，我们以下面两种方式来用一个聚合模型近似这个个体模型：把第 i 保单承保的金额变为 $0.8b_i$, 或者把该保单导致理赔的概率变为 $0.8q_i$. 哪种方法正确？试求在两种方式下理赔总额的方差. 如果有一个可以从死亡率表和包含性别、年龄和风险额的档案中计算出停止损失保费的程序供我们使用，那么在上面两种情况下如果进行计算？

5. [♠] 如果要求绝对精度为 ε, 那么 (3.56) 中的 x 为多大时我们可以停止连加？

6. 设一个保单组合由两类保单构成，其中第 i 类含有 1000 个保单，且每个保单以概率 0.01 产生额度为 $b_i = i$ 的理赔，　$i = 1, 2$. 记 B_i 为第 i 类保单的总理赔次数. 则理赔总额 S 可以表示为 $S = B_1 + 2B_2$, 理赔总次数为 $N = B_1 + B_2$. 考虑服从复合二项分布的随机变量 $T = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, 其中 $\Pr[X_i = 1] = \Pr[X_i = 2] = 1/2$. 试从最大值、期望值、方差、理赔次数分布以及它们本身的分布等角度比较 S 和 T. 再在假设 B_1 和 B_2 ~Poisson(10) 分布下做这些比较.

7. 考虑在某个保单组合上的一个超额损失再保. 当理赔额为 x 时，再保商必须赔付 $h(x) = (x-\beta)_+$. 设理赔过程为一个复合泊松过程，其参数为 10, 理赔分布为 (1000, 2000) 均匀分布. 试对 $\beta \in [1000, 2000]$ 来求一年里再保商赔付总额的分布函数.

8. 设两个保单组合 P1 和 P2 满足如下特征：

	风险额	保单数	理赔概率
P1	z_1	n_1	q_1
	z_2	n_2	q_2
P2	z_1	$2n_1$	$\frac{1}{2}q_1$
	z_2	$2n_2$	$\frac{1}{2}q_2$

在 P1 和 P2 的个体风险模型下求理赔总额的方差的差. 用文中所推荐的方法构造 P1 和 P2 的聚合近似，验证它们是否相等.

9. 设某个保单组合包含两类合同. 在第 k 类合同中 $(k = 1, 2)$ 理赔发生的概率为 q_k, 保单数目为 n_k. 如果有一个理赔发生，该理赔等于 x 的概率记为 $p_k(x)$, 满足：

	n_k	q_k	$p_k(1)$	$p_k(2)$	$p_k(3)$
第 1 类	1000	0.01	0.5	0	0.5
第 2 类	2000	0.02	0.5	0.5	0

设所有的保单是相互独立的. 试构造一个聚合模型 T 来近似理赔总额. 在构造的时候应确保正理赔次数的期望值和理赔总额的期望值保持不变. 试在此场合下给出 Panjer 递推公式的一个最简单的形式, 同时给出一个初始值. 在 T 下, 求出资本金的一个近似值, 使得它可以以 95% 的概率偿还该保单组合的所有理赔. 使用一个基于三个矩的近似公式, 并且与习题 §2.5 第 13 题的结果进行比较.

10. 设一个保单组合由 n 个合同构成, 每个合同产生一个大小为 1 的理赔的概率为 q. 试分别在个体模型、聚合模型以及 开放 聚合模型下求总理赔的分布函数. 当 $n \to \infty$ 而 q 固定时, 个体模型 S 是否收敛于聚合模型 T, 或者换一句话说, 概率差 $\Pr[(S - E[S])/\sqrt{\mathrm{Var}[S]} \leqslant x] - \Pr[(T - E[S])/\sqrt{\mathrm{Var}[S]} \leqslant x]$ 是否收敛于 0?

§3.8

1. 按照如下提示的方法求对数正态分布和 Pareto 分布的期望和方差 (见表 A): 如果 $Y \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$, 那么 $\log Y \sim N(\mu, \sigma^2)$; 如果 $Y \sim \mathrm{Pareto}(\alpha, x_0)$, 那么 $Y/x_0 \sim \mathrm{Pareto}(\alpha, 1)$ 且 $\log(Y/x_0) \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$.

2. 设随机变量 X 的分布函数中含有一个参数 λ, 如果随机变量 λX (或者更一般地说对某个函数 f 随机变量 $f(\lambda)X$) 的分布与 λ 无关, 我们就称 λ 为该随机变量 X 的刻度参数. 指出本章中哪些分布参数是刻度参数. 证明偏度 γ_X 和变异系数 σ_X/μ_X 都不依赖于这类参数, 并对给定的分布求这两个量.

3. [♠] 证明表达式 (3.57) 确为一个分布函数, 它当 $x = 0$ 时等于 0, 当 $x \to \infty$ 时趋于 1, 且具有正的导数 (3.58). 再请验证 (3.59) 是一个矩母函数, 并证明关于逆高斯分布的那些其它陈述.

4. 证明在 (3.60) 中的 q 上所加的条件足以保证 $p(\cdot)$ 是一个概率密度函数.

5. 设 Z 是如 (3.60) 所示的指数分布的混合 / 组合. 试求其分布函数 $\Pr[Z \leqslant d]$ 和停止损失保费 $E[(Z - d)_+]$. 再求给定 $Z > z$ 条件下, $Z - z$ 的条件分布.

6. 求指数分布混合 / 组合的众数, 以及对数正态分布的众数和中位数.

7. [♠] 求逆高斯分布 $\mathrm{IG}(\alpha, \alpha)$ 的众数. 对于图 3.1 给出的那些参数值, 请使用你的计算机来求该分布的中位数.

§3.9

1. 设 X 服从期望为 10000 和标准差为 1000 的正态分布. 在自留额为 13000 时求停止损失保费. 设另有一个随机变量 Y, 其前两阶矩与 X 的相同, 但是偏度为 1. 对 Y 求同样的停止损失保费.

2. 证明 $E[(S - d)_+] = E[S] - d + \int_0^d (d - x)dF(x) = E[S] - \int_0^d [1 - F(x)]dx$.

3. 如果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 证明 $\int_\mu^\infty E[(X - t)_+]dt = \frac{1}{4}\sigma^2$, 并计算 $E[(X - \mu)_+]$.

4. 验证 (3.72). 再验证 (3.73) 和 (3.74), 并说明如何使用它们来近似自留损失的方差.

5. 设理赔次数服从 Poisson(λ) 分布, 理赔额服从 Pareto 分布, 又设免赔额为 d. 请给出净保费的一个表达式.

6. [♠] 设 $X \sim \mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$. 试对 $d > 0$ 求停止损失保费 $E[(X - d)_+]$. 把你的结果与 Black-Scholes 期权定价公式进行比较, 并给出解释.

7. 在例 3.9.5 的表格中, 在一些地方 (例如 $d = 0.4$ 处) 使用线性插值来计算停止损失保费

会不会导致计算结果过高或者过低？

8. 设 N 是一个整值风险变量，满足 $E[(N-d)_+] = E[(U-d)_+]$, $d = 0,1,2,\cdots$, 其中 $U \sim N(0,1)$. 求 $\Pr[N=1]$.

9. 记 $\pi(t) = E[(U-t)_+]$ 为 $U \sim N(0,1)$ 分布的停止损失保费，其中自留额 $-\infty < t < \infty$. 证明 $\pi(-t)$ 满足 $\pi(-t) = t + \pi(+t)$, $t \geqslant 0$, 并绘制出 $\pi(t)$ 的草图.

10. 在 3.9 节和 3.10 节中，自留额被写成 $\mu + k\sigma$, 即被表示为期望损失与一些标准差和的形式. 然而在保险实务中，自留额总是表示为期望损失的一个百分数. 现在我们考虑两个保险公司，对某种风险的赔付由停止损失保险来计算. 该风险服从复合泊松分布，参数为 λ_i, 单个损失 X 服从期望值为 $E[X] = 1000$ 的指数分布. 第一个公司小一些，其参数为 $\lambda_1 = 3$; 第二个公司大一些，其参数为 $\lambda_2 = 300$. 在自留额 d 分别取为期望损失的 80%, 100% 和 120% 时，两个公司对应的净停止损失保费分别为多少？把这些金额表示为期望损失的百分数，并使用正态近似法.

§3.10

1. 证明 (3.82) 和 (3.83), 并验证 (3.82) 中的被积函数非负.

2. 如果 $W = (1-I)\mu + IU$, 其中 $\mu = E[U]$, $I \sim \text{Bernoulli}(\alpha)$, 且 $\alpha = \text{Var}[W]/\text{Var}[U]$, 试证明此时 (3.85) 是准确的.

3. 验证 (3.88) 和 (3.89), 再验证 (3.89) 的最后一项的积分值为 0.

4. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 是一列独立同分布的风险变量，代表着一个保单组合在连续几年的损失情况. 对某个自留额 d, 我们可以每年用一个单独的停止损失合同来保这些风险变量，但是也可以对整个 n 年阶段只用一个取自留额为 nd 的合同. 试证 $E[(X_1-d)_+] + \cdots + E[(X_n-d)_+] \geqslant E[(X_1+\cdots+X_n-nd)_+]$. 当 $d \geqslant E[X_i]$ 时，比较那些一年期合同的净停止损失保费 $E[(X_1-d)_+]$ 的总和与 n 年期的停止损失保费 $E[(X_1+\cdots+X_n-nd)_+]$ 的大小关系.

5. 设 $B_1 \sim B(4, 0.05)$, $B_2 \sim B(2, 0.1)$, $S = B_1 + B_2$ 且 $T \sim \text{Poisson}(0.4)$. 分别对自留额 $d = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ 使用经验法则 3.10.1, 并对结果进行讨论.

6. 试用区间长度为 $\delta = 1$ 的梯形法则 $\int_0^\infty f(x)dx \approx \frac{1}{2\delta}\sum_1^\infty [f(i\delta) + f((i-1)\delta)]$ 来推导公式 (3.84).



第4章　破产理论

§4.1　引　言

本章我们再一次集中讨论聚合风险模型，不过现在处理的是远期情形．我们要考虑保险人的资本金 $U(t)$ 随着时间的积累问题．由于挣得的保费，随机过程 $U(t)$ 随着时间连续增加，但是又由于对索赔的赔付，该随机过程会逐段有下跳．当资本金为负时，我们说破产发生了．假设年保费和索赔过程不变，以 $\psi(u)$ 记破产概率．给定初始资本金 $u=U(0)$，破产概率可以作为综合保费和索赔过程的保险公司稳健性的一个指标，是风险管理的一个有用工具．破产概率高意味着保险公司不稳定：这时保险人必须采取诸如进行再保或者提高保费等措施，或者还可以设法吸收一些额外的资本金．

破产概率使得我们可以对不同的保单组合进行比较，但是我们不可以对破产概率理解绝对化，这是因为实际上它并非真正表示保险公司将在近期倒闭的概率．首先，破产可能会等到数个世纪才会真正发生．其次，在计算破产概率的时候，对过程的一些潜在干涉 (如分红利或者对一些索赔记录不好的风险变量提高保费等) 都被忽略了．再者，一方面通货膨胀的影响和另一方面资本金的收益被假设成正好相互抵消了．破产概率只考虑到保险风险，而没有考虑到管理上可能发生的重大失误．最后，破产的状况仅仅是一个数学概念而已：资本金过程变为 -1 欧元时，保险公司实际上并没有倒闭，而资本金过程变为 $+1$ 欧元时，保险公司几乎没有了偿付能力．

破产概率的计算是精算学的一个经典的问题．虽然有可能求出没有破产的概率 $1-\psi(u)$ (未破产概率) 的矩母函数，但是破产概率仅仅对两种类型的索赔分布才容易计算出来．它们是指数分布及其和、混合和组合以及只取有限个值的分布．不过对其它一些分布来说，通常我们可以建立起一个优雅的并且足够精确的上界估计 $\psi(u)\leqslant e^{-Ru}$．该表达式中的实数 R 被称为 *调节系数*．这个所谓的 Lundberg *上界* 常常被用来代替真正的破产概率值： R 越大，破产概率的上界就越小，从而形势就越安全．调节系数 R 可以通过求解一个方程来得到，该方程包含理赔的矩母函数和期望值以及保费和理赔期望的比值．

对保率和理赔次数的期望值都乘以同一个因子不会导致最终破产的概率有任何变化：让时钟走得更快一些不会带来影响．人们已经尝试把破产概率换成一个更“实际的”量，例如 *有限* 时间破产概率， 即破产发生在时刻 t_0 之前的概率．但是

这个量表现得多少有些无序 (即在有些时刻有限时间破产概率未必按照理赔额的排序而递增), 并且引出一个新的问题, 即如何选取时间区间长度的问题. 如果我们只考虑在离散时间点 $0, 1, 2, \cdots$ 处的资金情况 (例如保险人记录下经营情况并合上账本的那些时刻), 那么另一个风险模型便产生了. 我们将在这个 *离散时间模型* 之中推导一些结果.

首先, 我们将用泊松过程来刻画索赔次数随着时间的增长情况. 泊松过程的一个典型特征是它的 *无记忆性*: 下一时段发生索赔与否独立于该过程的历史情况. 假设过程无记忆性的一个优点是数学处理上很简单; 缺点是这常常是不现实的. 到达过程为泊松过程的理赔总额构成一个复合泊松过程.

在本章的第二部分, 我们将通过研究最大累积损失来推导未破产概率的矩母函数, 这里所说的最大累积损失是指到任何一个时刻为止所挣得的保费和总赔付的差的最大值. 在理赔服从指数分布的几个变形时, 我们将利用这个矩母函数来求破产概率的值. 接下来, 我们还考虑破产概率的一些近似.

§4.2 风险过程

一个随机过程是由一些相关的下标为 t 的随机变量组成. 我们定义 *盈余过程* 或者 *风险过程* 如下:

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4.1}$$

其中

$$\begin{aligned} U(t) &= \text{保险人在时刻 } t \text{ 的资本金}, \\ u &= U(0) = \text{初始资本金}, \\ c &= \text{单位时间的 (常数) 保费收入}, \\ S(t) &= X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)}, \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} N(t) &= \text{到时刻 } t \text{ 为止的理赔次数}, \\ X_i &= \text{第 } i \text{ 个理赔的额度 (设为非负)}. \end{aligned}$$

图 4.1 绘制了这个风险过程典型的一个实现. 随机变量 $T_1, T_2, \cdots$ 表示每个理赔发生的时刻. 在没有理赔发生的时候该过程图形的斜率是 c; 但是在第 j 个理赔发生的时刻 $t = T_j$ 资本金就会有一个减少, 对应图形下降的高度为第 j 个理赔额 X_j. 既然图 4.1 中在时刻 T_4 所有的理赔总额 $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ 大于初始资本金 u 与所挣得的保费 cT_4 的和, 剩余的资本金 $U(T_4)$ 就小于 0. 我们称过程的这个状态为

破产，并且记这种状态第一次发生的时刻为 T. 于是,

$$
\begin{aligned}
T &= \min\{t|t \geqslant 0,\ U(t) < 0\} \\
&= \infty, \qquad \text{如果对所有的 } t \text{ 有 } U(t) \geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

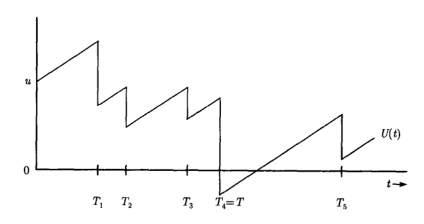


图 4.1 风险过程 $U(t)$ 的一个实现形式

随机变量 T 是 *有亏量的*, 这是由于事件 $T = \infty$ 有一个正概率. 破产事件最终发生的概率 (也即 T 取有限值的概率) 即为破产概率. 该概率可表示如下:

$$\psi(u) = \Pr[T < \infty]. \tag{4.3}$$

在研究理赔额过程 $S(t)$(即到时刻 t 为止的总理赔额) 之前, 我们先来看一看到时刻 t 为止的理赔次数过程 $N(t)$. 我们将假设 $N(t)$ 为一个所谓的泊松过程.

定义 4.2.1(泊松过程) 过程 $N(t)$ 称为是一个, 如果对某个强度 $\lambda > 0$, 该过程的增量满足如下性质: 对所有的 $t > 0$, $h > 0$ 以及每一个历史记录 $N(s)$, $s \leqslant t$, 有 *泊松过程*

$$N(t+h) - N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda h). \tag{4.4}$$

∇

泊松过程满足如下的性质:

- 增量是 *独立的*: 如果时间区间 $(t_i, t_i + h_i)$, $i = 1, 2, \cdots$, 互不相交, 那么增量 $N(t_i + h_i) - N(t_i)$ 相互独立;
- 增量是 *平稳的*: 对每一个 t, 增量 $N(t+h) - N(t)$ 服从 Poisson(λh) 分布.

除了理赔数的这个全局性的定义, 我们还可以考虑 *无穷小* 增量 $N(t+dt) - N(t)$, 这里的无穷小 "数" dt 仍然是正的, 但是比任何一个大于 0 的数都小. 对于泊松过

程，我们有

$$
\begin{aligned}
&\Pr[N(t+dt)-N(t)=1|N(s),0\leqslant s\leqslant t]=e^{-\lambda dt}\lambda dt=\lambda dt,\\
&\Pr[N(t+dt)-N(t)=0|N(s),0\leqslant s\leqslant t]=e^{-\lambda dt}=1-\lambda dt,\\
&\Pr[N(t+dt)-N(t)\geqslant 2|N(s),0\leqslant s\leqslant t]=0.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

事实上，这些等式并非真正是等式：只有当那些具有数量级 $(dt)^2$ 的项被忽略之后，它们才有效.

第三种定义该过程的方式是考虑 *等待时间*

$$
W_1=T_1,\quad W_j=T_j-T_{j-1},\quad j=2,3,\cdots. \tag{4.6}
$$

由于泊松过程是无记忆的，这些等待时间是一些服从 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ 分布的随机变量，并且它们也独立于过程的历史记录. 我们可以作如下说明：如果历史记录 H 表示过程到 t 为止满足性质 $T_{i-1}=t$ 的任何一个实现，那么

$$
\Pr[W_i>h|H]=\Pr[N(t+h)-N(t)=0|H]=e^{-\lambda h}. \tag{4.7}
$$

如果 $N(t)$ 是一个泊松过程，那么 $S(t)$ 是一个复合泊松过程；对一个固定的 $t=t_0$，累计理赔额 $S(t_0)$ 服从一个参数为 λt_0 的复合泊松分布.

一些其它的记号：我们记一次理赔的分布函数和矩分别为

$$
P(x)=\Pr[X_i\leqslant x];\quad \mu_j=E[X_i^j],\quad i,j=1,2,\cdots, \tag{4.8}
$$

定义 *负荷保费因子* 或者 *安全系数* θ 为 $c=(1+\theta)\lambda\mu_1$，于是

$$
\theta=\frac{c}{\lambda\mu_1}-1. \tag{4.9}
$$

§4.3　指数型上界

本节先给出 F. Lundberg 指数上界的一个简洁优雅的证明，然后推导出一些更精确的结果. 首先引出下面调节系数的概念.

定义 4.3.1(调节系数)　设理赔 $X\geqslant 0$ 满足 $E[X]=\mu_1>0$. 我们称关于 r 的方程

$$
1+(1+\theta)\mu_1 r=m_X(r) \tag{4.10}
$$

的正数解 R 为 X 的调节系数 (见图 4.2).　∇

一般地说，调节系数方程 (4.10) 有一个正数解：$m_X(t)$ 是严格凸的 (因为 $m''_X(t)=E[X^2e^{tX}]>0$)，$m'_X(0)<(1+\theta)\mu_1$，并且几乎无一例外地有 $m_X(t)$ 连续趋

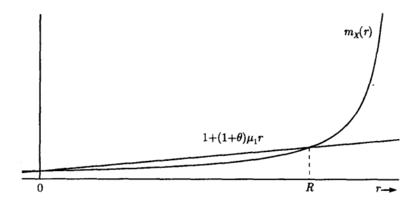


图 4.2 (4.10) 确定的调节系数 R

近于 ∞. 注意到当 $\theta\downarrow 0$ 时 R 的极限为 0, 而当 $\theta\uparrow\infty$ 时 R 趋近于 $m_X(r)$ 的渐近线或 ∞.

注 4.3.2(关于调节系数的等价方程) 调节系数也可以被看作如下任何一个等价方程的正数解 (见习题 §4.3 第 1 题):

$$\begin{aligned}&\lambda+cR=\lambda m_X(R),\\&\int_0^\infty[e^{Rx}-(1+\theta)][1-P(x)]dx=0,\\&e^{Rc}=E[e^{RS}]\quad\text{或}\quad m_{c-S}(-R)=1\quad\text{或}\quad c=\frac{1}{R}\log m_S(R),\end{aligned}\tag{4.11}$$

这里 S 表示在长度为 1 的时间区间上的理赔总额 (从而 $c-S$ 表示在该区间上的收益). 注意到 S 服从一个参数为 λ 的复合泊松分布, 从而 $m_S(r)=\exp\{\lambda(m_X(r)-1)\}$. 从最后一个方程我们可以看出, 在指数效用函数 (这导致了年保费 c, 参看 (1.20)) 的情况下, 调节系数 R 对应于风险厌恶系数 α. (4.11) 的第二个方程可以由分部积分证得, 此时 $R=0$ 不再是一个根. 其它方程仍然容许 $R=0$ 这个根. ▽

例 4.3.3(指数分布场合下的调节系数) 设 X 服从一个参数为 $\beta=1/\mu_1$ 的指数分布, 则对应的调节系数是如下方程的正数解:

$$1+(1+\theta)\mu_1 r=m_X(r)=\frac{\beta}{\beta-r}.\tag{4.12}$$

该方程有一个平凡解为 $r=0$ 和另一个解

$$r=R=\frac{\theta\beta}{1+\theta}.\tag{4.13}$$

可见, 这种情况下调节系数有一个清晰的表达式. ▽

对大多数的分布来说，调节系数是没有清晰表达式的. 为了有助于使用电子软件或计算程序求解方程 (4.10), 我们可以利用事实 $R \in [0, 2\theta\mu_1/\mu_2]$ (见习题 §4.3 第 2 题).

在下面的定理中，我们来证明破产概率中著名的 F. Lundberg 型指数不等式. 令人惊讶的是这里的证明使用的仅仅是数学归纳法.

定理 4.3.4(破产概率的 Lundberg 型指数界) 设在一个复合泊松风险过程中，初始资本金为 u, 单位时间的保费为 c, 理赔分布及其矩母函数分别为 $P(\cdot)$ 和 $m_X(t)$, 并且调节系数 R 满足 (4.10), 我们有如下关于破产概率的不等式:

$$\psi(u) \leqslant e^{-Ru}. \tag{4.14}$$

证明 记 $\psi_k(u)$ 为破产发生在第 k 个理赔来到的时刻或之前的概率，其中 $-\infty < u < \infty$, $k = 0, 1, 2, \cdots$. 既然对所有的 u, 当 $k \to \infty$ 时有 $\psi_k(u)$ 的极限等于 $\psi(u)$, 我们只需要证明 $\psi_k(u) \leqslant e^{-Ru}$ 对每一个 k 成立即可. 在 $k = 0$ 时，由于当 $u < 0$ 时，有 $\psi_0(u) = 1$; 而当 $u \geqslant 0$ 时，有 $\psi_0(u) = 0$, 所证的不等式自然成立. 设第一个理赔发生在时刻 t. 该事件的 "概率" 为 $\lambda e^{-\lambda t}dt$. 再设该理赔的大小为 x, 对应的概率为 $dP(x)$. 于是在这个时刻的资本金为 $u + ct - x$. 关于 x 和 t 积分得到

$$\psi_k(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \psi_{k-1}(u + ct - x)dP(x)\lambda e^{-\lambda t}dt. \tag{4.15}$$

现在，我们归纳假设结论对 $k-1$ 成立，即对所有的 u 有 $\psi_{k-1}(u) \leqslant e^{-Ru}$. 于是由 (4.15) 我们得到

$$\begin{aligned}\psi_k(u) &\leqslant \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\{-R(u + ct - x)\}dP(x)\lambda e^{-\lambda t}dt \\ &= e^{-Ru}\int_0^\infty \lambda\exp\{-t(\lambda + Rc)\}dt\int_0^\infty e^{Rx}dP(x) \\ &= e^{-Ru}\frac{\lambda}{\lambda + cR}m_X(R) = e^{-Ru},\end{aligned} \tag{4.16}$$

其中最后一步用到了 (4.11). ∇

注 4.3.5(调节系数的解释；鞅) 调节系数 R 使得 $E[e^{-RU(t)}]$ 的值关于 t 不变. 换一句话说，$e^{-RU(t)}$ 是一个 鞅: 它可以解释为在一系列公平游戏规则下一个赌徒的财富. 我们说明如下: 既然 $U(t) = u + ct - S(t)$ 且 $S(t)$ 服从参数为 λt 的复合泊松分布，我们再一次使用 (4.11) 得到

$$\begin{aligned}E[e^{-RU(t)}] &= E[e^{-R\{u+ct-S(t)\}}] \\ &= e^{-Ru}[e^{-Rc}\exp\{\lambda(m_X(R) - 1)\}]^t \\ &= e^{-Ru}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

注意到如果把 R 换为任何一个其它的常数，那么在 (4.17) 的方括号里的表达式就不等于 1 了，所以实际上调节系数 R 是使得 $e^{-RU(t)}$ 成为鞅的唯一常数. ∇

§ 4.4 破产概率和指数型理赔

本节给出破产概率一个表达式，该表达式涉及到 $U(T)$(即破产时刻的资本金) 在给定 "破产发生在有限时间" 条件下的矩母函数. 该表达式使得我们可以在指数型理赔下给出破产概率的一个准确表达式.

定理 4.4.1(破产概率) 设初始资本金 $u \geqslant 0$, 则破产概率满足

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)}|T<\infty]}. \tag{4.18}$$

证明 对 $R>0$ 和 $t>0$, 我们有

$$\begin{aligned} E[e^{-RU(t)}] &= E[e^{-RU(t)}|T \leqslant t]\Pr[T \leqslant t] \\ &\quad + E[e^{-RU(t)}|T>t]\Pr[T>t]. \end{aligned} \tag{4.19}$$

由注 4.3.5 我们知道上式左边等于 e^{-Ru}. 关于 (4.19) 的第一个条件期望，由于对任何 $v \in [0,t]$ 有 $U(t) = U(v) + c(t-v) - [S(t) - S(v)]$ (见 (4.17)), 我们得到

$$\begin{aligned} E[e^{-RU(t)}|T=v] &= E[e^{-R\{U(v)+c(t-v)-[S(t)-S(v)]\}}|T=v] \\ &= E[e^{-RU(v)}|T=v]e^{-Rc(t-v)}E[e^{R\{S(t)-S(v)\}}|T=v] \\ &= E[e^{-RU(v)}|T=v]\left\{e^{-Rc}\exp[\lambda(m_X(R)-1)]\right\}^{t-v} \\ &= E[e^{-RU(T)}|T=v]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

发生在 v 和 t 之间的理赔总额 $S(t)-S(v)$ 还是服从一个复合泊松分布. 因为风险过程在 v 之后的情况独立于在 v 之前的情况，所以 $U(v)$ 和 $S(t)-S(v)$ 相互独立. 花括弧里的那一项等于 1. 等式 (4.20) 对所有的 $v \leqslant t$ 成立，所以 $E[e^{-RU(t)}|T \leqslant t] = E[e^{-RU(T)}|T \leqslant t]$ 也成立.

因为当 $t \to \infty$ 时，有 $\Pr[T \leqslant t] \uparrow \Pr[T<\infty]$, 所以只需要证明当 $t \to \infty$ 时 (4.19) 的最后一项趋于 0 即可. 为此，我们按照 $U(t)$ 的大小把事件 "$T>t$" 分割开. 具体地，对某个函数 $u_0(t)$, 考虑 $U(t) \leqslant u_0(t)$ 和 $U(t) > u_0(t)$ 两种情况. 注意到 $T>t$ 意味着保险公司在时刻 t 没有破产，即 $U(t) \geqslant 0$, 所以 $e^{-RU(t)} \leqslant 1$. 于是

$$\begin{aligned} & E[e^{-RU(t)}|T>t]\Pr[T>t] \\ = & E[e^{-RU(t)}|T>t,\ 0 \leqslant U(t) \leqslant u_0(t)]\Pr[T>t,\ 0 \leqslant U(t) \leqslant u_0(t)] \\ & + E[e^{-RU(t)}|T>t,\ U(t)>u_0(t)]\Pr[T>t,\ 0 \leqslant U(t) > u_0(t)] \\ \leqslant & \Pr[U(t) \leqslant u_0(t)] + E[\exp(-Ru_0(t))]. \end{aligned} \tag{4.21}$$

当 $u_0(t) \to \infty$ 时，上式第二项趋于 0. 至于第一项，注意到 $U(t)$ 的期望值为 $\mu(t) = u + ct - \lambda t\mu_1$，方差为 $\sigma^2(t) = \lambda t\mu_2$. 利用 Chebyshev 不等式， 我们只需要选择一个函数 $u_0(t)$ 使得 $(\mu(t) - u_0(t))/\sigma(t) \to \infty$ 成立即可. 这是完全可能的，例如取 $u_0(t) = t^{2/3}$. ∇

推论 4.4.2(定理 4.4.1 的一些推论) 1. 如果 $\theta \downarrow 0$，那么图 4.2 中的斜线趋于一条切线，并且由于定理 4.4.1，$\psi(u) \to 1$；如果 $\theta \leqslant 0$ 那么破产概率等于 1 (见习题 §4.4 第 1 题).

2. 如果 $T < \infty$，那么 $U(T) < 0$. 从而 (4.18) 的分母大于或者等于 1，所以 $\psi(u) \leqslant e^{-Ru}$；这又提供了定理 4.3.4 的另一个证明方法.

3. 如果理赔额不超过 b，那么 $U(T) \geqslant -b$，由此可以得到破产概率的一个指数型下界： $\psi(u) \geqslant e^{-R(u+b)}$.

4. 当 $u \to \infty$ 时，颇为可信地， (4.18) 的分母有一个有限的极限，我们设此极限为 c. 于是当然有 $c > 1$. 这得到了如下的关于破产概率 $\psi(\cdot)$ 的渐近逼近公式：当 u 取大值时，有 $\psi(u) \approx \frac{1}{c}e^{-Ru}$.

5. 如果 $R > 0$，那么对任何的 $u \geqslant 0$ 有 $1 - \psi(u) > 0$. 反之，如果对某 $u_0 \geqslant 0$ 有 $1 - \psi(u_0) = 0$，那么 $R = 0$ 且对一切的 $u \geqslant 0$ 有 $1 - \psi(u) = 0$ 成立. ∇

例 4.4.3(破产概率的表达式，指数型理赔) 由 (4.18)，当理赔额服从 $\text{Exp}(\beta)$ 分布时，我们可以推导出破产概率的一个准确表达式. 为此，设破产发生在有限时刻 $T = t$，且破产前的最后一刻资金 $U(T-0)$ 等于 v. 于是，对每个 v, t 和 y，如果 H 表示满足 $U(T-0) = v$ 和 $T = t$ 的任何一个历史记录，我们有

$$\Pr[-U(T) > y|H] = \Pr[X > v + y|X > v] = \frac{e^{-\beta(v+y)}}{e^{-\beta v}} = e^{-\beta y}. \tag{4.22}$$

显然，破产时刻的亏量 $-U(T)$ 也服从一个 $\text{Exp}(\beta)$ 分布，所以 (4.18) 的分母等于 $\beta/(\beta - R)$. 由 $\beta = 1/\mu_1$ 和 $R = \theta\beta/(1+\theta)$ (见 (4.13)) 知 $\beta/(\beta - R) = 1 + \theta$，当理赔服从 $\text{Exp}(\beta)$ 分布时， 我们有如下的关于破产概率的准确表达式：

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{1}{1+\theta}\exp\left(-\frac{\theta\beta u}{1+\theta}\right) = \frac{1}{1+\theta}\exp\left(-\frac{\theta}{1+\theta}\frac{u}{\mu_1}\right) \\ &= \psi(0)e^{-Ru}.\end{aligned} \tag{4.23}$$

注意到此时除了常数 $1/(1+\theta)$ 外， Lundberg 指数上界 归结为现在的一个等式. 在此情形下 (4.18) 的分母不依赖于 u. 不过在一般情况下它会依赖于 u. ∇

§ 4.5 离散时间模型

在离散时间模型中，我们要考虑比上一节的复合泊松过程更一般的风险过程 $U(t)$，不过现在的过程只在时刻 $0, 1, 2, \cdots$ 处取值. 我们用 U_n 来取代 $U(n)$，$n =$

$0, 1, \cdots$. 记 G_n 为从 $n-1$ 到 n 的时间段的收益，所以

$$U_n = u + G_1 + G_2 + \cdots + G_n, \quad n = 0, 1, \cdots. \tag{4.24}$$

接下来，我们将要讨论对应于 $U(t)$ 是一个复合泊松过程时的情况，但是现在我们只假设收益 $G_1, G_2, \cdots$ 是独立同分布的，满足 $\Pr[G_n < 0] > 0$ 和 $E[G_n] = \mu > 0$. 我们定义破产时间 $\widetilde{T}$, 破产概率 $\widetilde{\psi}(u)$ 和调节系数 $\widetilde{R} > 0$ 的离散版本分别为

$$\widetilde{T} = \min\{n : U_n < 0\}; \quad \widetilde{\psi}(u) = \Pr[\widetilde{T} < \infty]; \quad m_G(-\widetilde{R}) = 1. \tag{4.25}$$

最后的这个方程具有唯一解，理由如下：由于 $E[G] > 0$ 和 $\Pr[G < 0] > 0$, 我们有 $m_G'(0) > 0$ 且当 $r \to \infty$ 时 $m_G(-r) \to \infty$, 然而 $m_G''(-r) = E[G^2 e^{-Gr}] > 0$, 所以 $m_G(\cdot)$ 是一个下凸函数.

例 4.5.1(服从复合泊松分布的年理赔额) 在 $U(t)$ 是复合泊松过程这个特殊场合下，我们有 $G_n = c - Z_n$, 其中 Z_n 表示在第 n 年的理赔总额，服从复合泊松分布. 由 (4.11) 我们知 R 满足方程 $m_{c-Z}(-R) = 1$. 于是 $R = \widetilde{R}$. ∇

例 4.5.2(服从正态分布的年理赔额) 如果 $G_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\mu > 0$, 那么 $\widetilde{R} = 2\mu/\sigma^2$ 可以通过求解如下方程得到：

$$\log(m_G(-r)) = 0 = -\mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2. \tag{4.26}$$

结合这个结果与上面一个例子，我们作如下观察：如果我们考虑的复合泊松过程具有一个大的泊松参数，即在时刻 $0, 1, 2, \cdots$ 之间有许多理赔发生，那么 S_n 将近似服从一个正态分布. 从而两个调节系数之间的差别就会很小，即有 $R \approx 2\mu/\sigma^2$. 另一方面，如果我们在习题 §4.3 第 2 题中取 $\mu = c - \lambda\mu_1 = \theta\lambda\mu_1$ 和 $\sigma^2 = \lambda\mu_2$, 那么可以看出 $2\mu/\sigma^2$ 是 R 的一个上界. ∇

类似于定理 4.4.1, 我们可以证明如下的等式：

$$\widetilde{\psi}(u) = \frac{e^{-\widetilde{R}u}}{E[e^{-\widetilde{R}U(\widetilde{T})} | \widetilde{T} < \infty]}. \tag{4.27}$$

所以，在离散时间模型下，我们也可以得到破产概率的一个指数型上界

$$\widetilde{\psi}(u) \leqslant e^{-\widetilde{R}u}. \tag{4.28}$$

§ 4.6 再保与破产概率

在我们假定的经济环境中，再保合同必须用期望效用进行比较. 不过在实际中这个方法是不可用的. 另一个办法是对再保之后的破产概率进行比较，这也是十

分困难的. 所以我们将集中讨论调节系数, 并尝试通过再保来得到一个更有利的调节系数. 这实际上就是我们取调节系数这个名字的真正原因.

在再保时我们把一部分期望收益转交给再保商, 以换回在风险环境下更稳定的形势. 这两个互相冲突着的准则不可能同时得到最优化. 在统计学中也会有类似的问题: 我们常要在检验的功效和样本容量之间找出一个折衷办法. 在现在的情况下我们可以借鉴统计学里面的手法, 即最大化一个准则而限制另一个准则. 例如, 我们可以在调节系数 R 大于某个 R_0 的限制条件下最大化期望收益.

我们将考虑两种情形. 首先, 我们使用离散时间破产模型, 剔除一年理赔总额的再保份额, 再检查离散调节系数 $\widetilde{R}$. 在连续时间模型下, 我们要在两种形式的再保 (即比例再保险和对每个理赔赋予一个自留额的超额损失再保险) 下比较 R.

例 4.6.1(离散化的复合泊松理赔过程)　再一次考虑例 3.5.4 中的复合泊松分布, 其中 $\lambda = 1$, $p(1) = p(2) = \frac{1}{2}$. 如果相对安全附加系数为 $\theta = 0.2$ (即年保费 $c = 1.8$), 求一年的理赔总额 S 的离散调节系数 $\widetilde{R}$.

调节系数 $\widetilde{R}$ 的计算如下:

$$\lambda + cr = \lambda m_X(r) \Leftrightarrow 1 + 1.8r = \frac{1}{2}e^r + \frac{1}{2}e^{2r} \Rightarrow \widetilde{R} \approx 0.211. \tag{4.29}$$

现在我们假设剔除一个取自留额 $d = 3$ 的停止损失再保险. 在再保中对于一个理赔 Y, 再保商索要的保费是 $(1+\xi)E[Y]$, 其中 $\xi = 0.8$. 如果 $d = 3$, 再保费相当于 $(1+\xi)E[(S-d)_+] = 1.8\pi(3) = 0.362$. 为了求调节系数, 我们来计算一年总收益 G_i 的分布函数, 该总收益 G_i 由保费收入减去再保费以及自留损失构成. 因此,

$$G_i = \begin{cases} 1.8 - 0.362 - S_i, & \text{如果 } S_i = 0, 1, 2, 3; \\ 1.8 - 0.362 - 3, & \text{如果 } S_i > 3. \end{cases} \tag{4.30}$$

对应的离散调节系数 $\widetilde{R}$ 由求解方程 (4.25) 来得出, 值近似为 0.199.

由于再保, 我们的期望年收益减少了. 它等于我们最初的期望收益减去再保商的收益. 例如, 当 $d = 3$ 时, 它等于 $1.8 - 1.5 - \xi\pi(3) = 0.139$. 下表给出不同自留额 d 对应的一些结果:

自留额 d	$\widetilde{R}$	期望收益
3	0.199	0.139
4	0.236	0.234
5	0.230	0.273
∞	0.211	0.300

可见 $d = 3$ 这个决定是不合理的: $d = 4$, $d = 5$ 或者 $d = \infty$ (即没有了再保) 的决

定更好一些，因为它们不但可以产生更高的期望收益，而且在调节系数更大的意义下还可以带来更稳定的形势. ∇

例 4.6.2(再保，个体理赔) 再保也可以影响到每个个体理赔，而不仅仅是影响一个阶段的理赔总额. 设当理赔额为 x 时再保商的赔付额等于 $h(x)$. 换言之，自留损失等于 $x-h(x)$. 我们考虑两个特例：

$$\begin{aligned} &h(x)=\alpha x, \quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1, && \text{比例再保险} \\ &h(x)=(x-\beta)_+, \quad 0\leqslant\beta, && \text{超额损失再保险} \end{aligned} \tag{4.31}$$

显然，比例再保险也可以被看作是对总理赔的一个再保. 我们将考查通常的调节系数 R_h, 即方程

$$\lambda+(c-c_h)r=\lambda\int_0^\infty e^{r[x-h(x)]}dP(x) \tag{4.32}$$

的根，其中 c_h 表示再保费. 再保商在净保费上使用一个相对安全附加系数 ξ. 设 $\lambda=1$, 对 $x=1$ 和 $x=2$ 有 $p(x)=\frac{1}{2}$. 再令 $c=2$ (所以 $\theta=\frac{1}{3}$), 我们考虑两个值 $\xi=\frac{1}{3}$ 和 $\xi=\frac{2}{5}$.

对于比例再保 $h(x)=\alpha x$, 保费等于

$$c_h=(1+\xi)\lambda E[h(X)]=(1+\xi)\frac{3}{2}\alpha, \tag{4.33}$$

由于 $x-h(x)=(1-\alpha)x$, 故 (4.32) 给出方程

$$1+\left[2-(1+\xi)\frac{3}{2}\alpha\right]r=\frac{1}{2}e^{r(1-\alpha)}+\frac{1}{2}e^{2r(1-\alpha)}. \tag{4.34}$$

对 $\xi=\frac{1}{3}$, 我们有 $c_h=2\alpha$ 和 $R_h=\frac{0.325}{1-\alpha}$; 对 $\xi=\frac{2}{5}$, 有 $c_h=2.1\,\alpha$.

接下来，我们再考虑超额损失再保险 $h(x)=(x-\beta)_+$, 其中 $0\leqslant\beta\leqslant 2$. 再保费等于

$$\begin{aligned} c_h &= (1+\xi)\lambda\left[\frac{1}{2}h(1)+\frac{1}{2}h(2)\right] \\ &= \frac{1}{2}(1+\xi)[(1-\beta)_++(2-\beta)_+], \end{aligned} \tag{4.35}$$

而 $x-h(x)=\min\{x,\beta\}$, 故 R_h 是方程

$$\begin{aligned} &1+\left(2-\frac{1}{2}(1+\xi)[(1-\beta)_++(2-\beta)_+]\right)r \\ &=\frac{1}{2}[e^{\min\{\beta,1\}r}+e^{\min\{\beta,2\}r}] \end{aligned} \tag{4.36}$$

的一个根. 在下表中我们给出对应于不同的 β 值的 R_h 的一些结果，并与比例再保险下同样的结果进行比较，其中再保商的期望赔付是相同的: $\frac{3}{2}\alpha=\frac{1}{2}(1-\beta)_++\frac{1}{2}(2-\beta)_+$.

对于 $\xi=\frac{1}{3}$, 再保商和保险人的相对安全附加系数相等, 并且我们办理的再保越多, 调节系数就越大. 如果再保商的安全系数等于 $\frac{2}{5}$, 那么对 $\alpha \geqslant \frac{5}{6}$, 自留损失的期望 $\lambda E[X-h(X)]=\frac{3}{2}(1-\alpha)$ 不再小于剩余自留保费 $c-c_h=2-2.1\alpha$. 因而, 作为结果的自留安全系数不是正数, 而且最终破产是必然的. 在 $\beta \leqslant \frac{1}{4}$ 时的超额损失再保险 之中同样的现象也会发生. 在下表中这种情形被标以 $*$ 号.

	β	2.0	1.4	0.9	0.6	0.3	0.15	0.0
	α	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	1.0
$\xi=\frac{1}{3}$	XL	.326	.443	.612	.918	1.84	3.67	∞
	Prop.	.326	.407	.542	.813	1.63	3.25	∞
$\xi=\frac{2}{5}$	XL	.326	.426	.541	.667	.425	*	*
	Prop.	.326	.390	.482	.602	.382	*	*

由此表可见超额损失再保险 (XL) 的调节系数至少与具有同样的期望赔付的比例再保险 (Prop.) 的调节系数一样大. 这不是巧合: 由风险排序的理论可以证明, 在具有同样期望赔付的所有再保合同中, XL 再保险可以得到最好的 R- 值和最小的破产概率 (见例 10.4.4). $\triangledown$

§ 4.7　Beekman 卷积公式

本节我们将证明未破产概率可以表示为一个复合几何分布函数. 为此, 考虑**最大累积损失**, 即到时刻 t 为止的理赔总额和收取的保费的差的最大值:

$$L=\max\{S(t)-ct|t\geqslant 0\}. \tag{4.37}$$

因为 $S(0)=0$, 所以 $L\geqslant 0$. 事件 $L>u$ 发生当且仅当存在一个有限时刻 t 使得 $U(t)<0$. 换一句话说, 不等式 $L>u$ 和 $T<\infty$ 是等价的, 从而

$$\psi(u)=1-F_L(u). \tag{4.38}$$

接下来, 我们考虑盈余过程创新下纪录的时刻. 下纪录只能发生在赔付时刻. 我们用随机变量 $L_j, j=1,2,\cdots$ 来表示第 j 个下纪录比第 $j-1$ 的下纪录小的额度. 图 4.3 中共标出三个下纪录, 并假设在没有画出的时间段上过程向 ∞ 漂流. 设 M 是新纪录的随机个数. 我们有

$$L=L_1+L_2+\cdots+L_M. \tag{4.39}$$

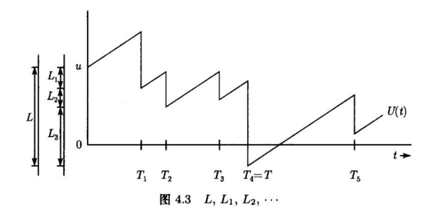


图 4.3 $L, L_1, L_2, \cdots$

由于泊松过程是无记忆的，所以每一个指定的下纪录是最后一个纪录的概率是相同的．于是，M 服从一个几何分布．由于同样的原因，$L_1, L_2, \cdots$ 是独立同分布的．M 的参数值 (即前一个下纪录是最后一个的概率) 等于过程从 0 点出发而没有破产的概率，于是该参数为 $1-\psi(0)$.

所以 L 服从一个复合几何分布，几何参数为 $1-\psi(0)$, 且给定事件 "$M \geqslant 1$" 下 L_1 的条件分布满足如下定理.

定理 4.7.1(在破产时刻资本金的分布) 如果初始资本金等于 0, 那么对所有的 $y>0$ 我们有

$$\Pr[U(T) \in (-y-dy,-y),\ T<\infty]=\frac{\lambda}{c}[1-P(y)]dy. \tag{4.40}$$

证明 在复合泊松过程下，在时间区间 $(t, t+dt)$ 有一个理赔发生的概率等于 λdt, 该概率独立于 t 以及过程直至该时刻的历史．所以在 0 和 dt 之间要么没有理赔发生 (概率为 $1-\lambda dt$) 且盈余过程从 u 增加到 $u+cdt$, 要么有一个大小为 X 的理赔发生．后一种情况包含两种可能：如果该理赔额小于 u, 那么过程将以资本金 $u+cdt-X$ 继续下去；否则破产就会发生，不过只有当 $X>u+y$ 时破产的严重程度会大于 y. 定义

$$G(u,y)=\Pr[U(T)\in(-\infty,-y),\ T<\infty|U(0)=u], \tag{4.41}$$

我们有

$$\begin{aligned} G(u,y) =\ & (1-\lambda dt)G(u+cdt,y) \\ & +\lambda dt\left\{\int_0^u G(u-x,y)dP(x)+\int_{u+y}^{\infty}dP(x)\right\}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

记 G' 为函数 G 关于 u 的偏导数，那么

$$G(u+cdt,y)=G(u,y)+cdt\,G'(u,y). \tag{4.43}$$

把 (4.43) 代入 (4.42), 从两边消掉 $G(u,y)$, 并除以 cdt, 我们得到

$$G'(u,y) = \frac{\lambda}{c}\left\{G(u,y) - \int_0^u G(u-x,y)dP(x) - \int_{u+y}^{\infty} dP(x)\right\}. \tag{4.44}$$

再按 $u \in [0,z]$ 对上式积分可得

$$\begin{aligned} G(z,y) - G(0,y) = \frac{\lambda}{c}\Bigg\{&\int_0^z G(u,y)du - \int_0^z \int_0^u G(u-x,y)dP(x)du \\ &- \int_0^z \int_{u+y}^{\infty} dP(x)du\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

(4.45) 中的二重积分可以按如下方式归结为一重积分. 对于第一个二重积分, 交换积分次序, 使用变量代换 $v = u - x$, 再交换积分次序, 于是

$$\begin{aligned} \int_0^z \int_0^u G(u-x,y)dP(x)du &= \int_0^z \int_0^{z-v} G(v,y)dP(x)dv \\ &= \int_0^z G(v,y)P(z-v)dv. \end{aligned} \tag{4.46}$$

至于 (4.45) 中的第二个二重积分, 我们使用变量代换 $v = u + y$ 得,

$$\int_0^z \int_{u+y}^{\infty} dP(x)du = \int_y^{z+y} [1-P(v)]dv. \tag{4.47}$$

从而,

$$\begin{aligned} G(z,y) - G(0,y) = \frac{\lambda}{c}\Bigg\{&\int_0^z G(u,y)[1-P(z-u)]du \\ &- \int_y^{z+y} [1-P(u)]du\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

取 $z \to \infty$, (4.48) 两边的第一项消失, 剩下的便是

$$G(0,y) = \frac{\lambda}{c}\int_y^{\infty} [1-P(u)]du. \tag{4.49}$$

∇

本定理有许多重要的推论.

推论 4.7.2(定理 4.7.1 的推论)　1. 初始值为 0 的破产概率只依赖于相对安全的附加系数. (4.40) 对 $y \in (0,\infty)$ 积分得到 $\Pr[T<\infty]$ 的值, 所以无论 $P(\cdot)$ 如何, 我们有

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty} [1-P(y)]dy = \frac{\lambda}{c}\mu_1 = \frac{1}{1+\theta}. \tag{4.50}$$

2. 设至少有一个新下纪录，则 L_1 与起始于 $u=0$ 的过程在破产时刻 (如果破产发生的话) 的数值具有相同的分布函数. 所以我们得到下纪录之间的改变量的密度函数具有如下形式:

$$f_{L_1}(y)=\frac{1-P(y)}{(1+\theta)\mu_1}\frac{1}{\psi(0)}=\frac{1-P(y)}{\mu_1},\quad y>0. \tag{4.51}$$

3. 记 $H(x)$ 为 L_1 的分布函数， p 为 M 的参数. 因为 L 有一个复合几何分布， 所以风险过程的未破产概率可以由 Beekman 卷积公式给出:

$$1-\psi(u)=\sum_{m=0}^{\infty}p(1-p)^m H^{m*}(u), \tag{4.52}$$

其中

$$p=\frac{\theta}{1+\theta},\quad H(x)=1-\frac{1}{\mu_1}\int_x^{\infty}[1-P(y)]dy. \tag{4.53}$$

4. 由 (4.38), 最大累积损失 L 的矩母函数也是未破产概率 $1-\psi(u)$ 的矩母函数，该矩母函数由下式给出:

$$m_L(r)=\frac{\theta}{1+\theta}+\frac{1}{1+\theta}\cdot\frac{\theta(m_X(r)-1)}{1+(1+\theta)\mu_1 r-m_X(r)}. \tag{4.54}$$

证明 只有最后一个断言需要证明. 由于 $L=L_1+\cdots+L_M$, 且 M 服从参数为 p 的几何分布，其中 $p=\frac{\theta}{1+\theta}$, 我们有

$$m_L(r)=m_M(\log m_{L_1}(r))=\frac{p}{1-(1-p)m_{L_1}(r)}. \tag{4.55}$$

由 L_1 的密度函数公式 (4.51) 可得 L_1 的矩母函数为

$$\begin{aligned}m_{L_1}(r)&=\frac{1}{\mu_1}\int_0^{\infty}e^{ry}(1-P(y))dy\\&=\frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{1}{r}[e^{ry}-1][1-P(y)]\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\frac{1}{r}[e^{ry}-1]dP(y)\right\}\\&=\frac{1}{\mu_1 r}[m_X(r)-1].\end{aligned} \tag{4.56}$$

这里用到了如下事实：当 $t\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}e^{ry}dP(y)<\infty&\Rightarrow\int_t^{\infty}e^{ry}dP(y)\downarrow 0\\&\Rightarrow e^{rt}\int_t^{\infty}dP(y)=e^{rt}(1-P(t))\downarrow 0.\end{aligned} \tag{4.57}$$

把 (4.56) 代入 (4.55) 得到 (4.54).　∇

注 4.7.3(破产概率的递归公式)　初始值为 u 的破产概率可以由初始值更小的一些破产概率表示如下：

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u [1-P(y)]\psi(u-y)dy + \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty [1-P(y)]dy. \tag{4.58}$$

为了证明这一点，注意到 $T<\infty$ 意味着盈余过程最终会走到初始水平以下，所以

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \Pr[T<\infty] = \Pr[T<\infty,\ M>0] \\ &= \Pr[T<\infty|M>0]\Pr[M>0] \\ &= \frac{1}{1+\theta}\int_0^\infty \Pr[T<\infty|L_1=y]f_{L_1}(y)dy \\ &= \frac{\lambda}{c}\left(\int_0^u \psi(u-y)(1-P(y))dy + \int_u^\infty (1-P(y))dy\right),\end{aligned} \tag{4.59}$$

其中我们用到了变量代换 $c=(1+\theta)\lambda\mu_1$.　∇

§4.8　破产概率的一些解析表达式

在两种情况下，我们可以给出破产概率的表达式：在指数分布及其混合或者组合的情形下，可以得到一个解析表达式；在离散分布情形下，我们可以推导出一个算法.

我们在上一章中得到了未破产概率 $1-\psi(u)$ 的矩母函数. 在一些情况下我们有可能去鉴别这个矩母函数，从而给出破产概率的一个表达式. 我们将结合两个指数分布的混合和组合来描述这个想法 (见 3.7 节). 由于 $1-\psi(0)=\theta/(1+\theta)$ 和

$$m_L(r) = \int_0^\infty e^{ru}d[1-\psi(u)] = 1-\psi(0) + \int_0^\infty e^{ru}(-\psi'(u))du, \tag{4.60}$$

由 (4.54) 可得函数 $-\psi'(u)$ 的 "矩母函数" 等于

$$\int_0^\infty e^{ru}(-\psi'(u))du = \frac{1}{1+\theta}\frac{\theta(m_X(r)-1)}{1+(1+\theta)\mu_1 r - m_X(r)}. \tag{4.61}$$

注意到除了一个常数因子外，$-\psi'(u)$ 是一个密度函数 (见习题 §4.8 第 1 题). 现在，如果 X 如 (3.60) 那样是两个指数型随机变量的组合或者混合，即对某个 $\alpha<\beta$ 和 $0\leqslant q\leqslant \frac{\beta}{\beta-\alpha}$, X 具有密度函数

$$p(x) = q\alpha e^{-\alpha x} + (1-q)\beta e^{-\beta x},\quad x>0, \tag{4.62}$$

那么对 (4.61) 右边的分子和分母同乘以 $(r-\alpha)(r-\beta)$ 后，(4.61) 右边可以被改写为两个 r 的多项式的比值. 通过使用部分分式法，该比值可以被分解为一些具有形式 $\delta\gamma/(\gamma-r)$ 的分数之和，每一项都对应于一个 $\mathrm{Exp}(\gamma)$ 分布的 δ 倍. 我们用两个例子来阐明这个方法.

例 4.8.1(指数分布下的破产概率) 在 (4.62) 中取 $q=0$ 和 $\beta=1$, 于是理赔分布是 Exp(1) 分布. 然后，对于 $\delta=1/(1+\theta)$ 和 $\gamma=\theta/(1+\theta)$, (4.61) 的右边给出

$$\frac{1}{1+\theta}\frac{\theta\left(\frac{1}{1-r}-1\right)}{1+(1+\theta)r-\frac{1}{1-r}}=\frac{\theta}{(1+\theta)[\theta-(1+\theta)r]}=\frac{\delta\gamma}{\gamma-r}. \tag{4.63}$$

除了一个常数因子 δ 外，这是一个 $\mathrm{Exp}(\gamma)$ 分布的矩母函数. 由 (4.61) 我们知道 $-\psi'(u)/\delta$ 等于该分布的密度函数. 对于 Exp(1) 分布，利用边界条件 $\psi(\infty)=0$ 得

$$\psi(u)=\frac{1}{1+\theta}\exp\left(\frac{-\theta u}{1+\theta}\right), \tag{4.64}$$

这对应于 §4.4 中的 (4.23) 在 $\beta=\mu_1=1$ 下的结果. ∇

例 4.8.2(破产概率，指数分布的混合) 取 $\theta=0.4$ 和 $p(x)=\frac{1}{2}\times 3e^{-3x}+\frac{1}{2}\times 7e^{-7x}$, $x>0$. 于是

$$m_X(r)=\frac{1}{2}\frac{3}{3-r}+\frac{1}{2}\frac{7}{7-r},\quad \mu_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}=\frac{5}{21}. \tag{4.65}$$

所以通过一些计算得到 (4.61) 的右边等于

$$\frac{6(5-r)}{7(6-7r+r^2)}=\frac{\delta}{1-r}+\frac{6\varepsilon}{6-r},\quad \delta=\frac{24}{35},\ \varepsilon=\frac{1}{35}. \tag{4.66}$$

在该情形下的破产概率等于

$$\psi(u)=\frac{24}{35}e^{-u}+\frac{1}{35}e^{-6u}. \tag{4.67}$$

注意到 $\psi(0)=\frac{1}{1+\theta}$ 确实成立. ∇

本方法对指数分布的组合及其极限情形 $\Gamma(2,\beta)$ 分布的效果也都很好 (见习题 §4.8 第 5~7 题). 我们也可以推广该方法到多于两个指数分布的混合 / 组合的场合，不过在此场合下我们要面临求解三次或更高次多项式的问题.

为了找到破产概率像 (4.67) 那样的表达式里面指数位置的系数 (即 (4.66) 的渐近线), 我们需要知道 (4.61) 右边分母的根. 设在密度函数 (4.62) 中有 $\alpha<\beta$ 和 $q\in(0,1)$. 我们不得不求解如下方程:

$$1+(1+\theta)\mu_1 r=q\frac{\alpha}{\alpha-r}+(1-q)\frac{\beta}{\beta-r}. \tag{4.68}$$

注意到只有在 r 处于渐近线的左侧 (即 $r<\alpha$) 时，该方程的右边才对应于理赔分布的矩母函数. 如果 r 更大的话该矩母函数等于 $+\infty$; 所以对应于图 4.4 中的这些分支我们记作 "$m_X(r)$" 而不是 $m_X(r)$. 从该图立即看出正根 r_1 和 r_2 满足

$$r_1=R<\alpha<r_2<\beta. \tag{4.69}$$

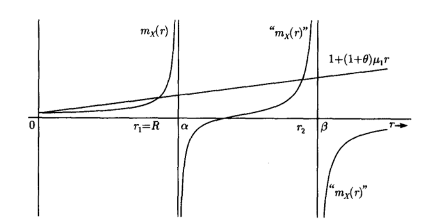


图 4.4　方程 (4.68) 的解. 只有左边的那支曲线才真正代表 X 的矩母函数

注 4.8.3(离散分布情形下的破产概率)　如果理赔 X 只分别以概率 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 取有限个正数值 $x_1,x_2,\cdots,x_m$, 则破产概率等于

$$\psi(u)=1-\frac{\theta}{1+\theta}\sum_{k_1,\cdots,k_m}(-z)^{k_1+\cdots+k_m}e^z\prod_{j=1}^{m}\frac{p_j^{k_j}}{k_j!}, \tag{4.70}$$

其中 $z=\frac{\lambda}{c}(u-k_1x_1-\cdots-k_mx_m)_+$. 连加号对所有的使得 $z>0$ 成立的那些 $k_1,\cdots,k_m=0,1,2,\cdots$ 进行, 从而结果是有限的. 关于 (4.70) 的证明可以参阅 Gerber (1989).　∇

§4.9　破产概率的近似计算

对于上一节没有提到的一些其它分布来说，想给出破产概率 $\psi(u)$ 的精确解是困难的. 但是破产概率的精确解并非如此重要，因为模型的一些其它因素也有可能会起决定性的作用. 由此，给出破产概率一些有效而又简单的近似公式是必要的.

首先，我们给出破产概率的一些全局性质，使得推导出来的近似公式应该尽量满足这些性质. 方程 (4.50) 给出

$$\psi(0)=\frac{1}{1+\theta}. \tag{4.71}$$

另外，我们知道 $\psi(u)=1-F_L(u)$, 于是由分部积分，

$$\int_0^\infty u\,d[1-\psi(u)]=\int_0^\infty \psi(u)du=E[L],$$

$$\int_0^\infty u^2\,d[1-\psi(u)]=\int_0^\infty 2u\psi(u)du=E[L^2]. \tag{4.72}$$

由于 $L=L_1+\cdots+L_M$ 有一个复合几何分布， 其中 M 和 L_j 的分布都已由 §4.7 给出，该最大累积损失 L 的矩可以很容易地求出. 如下的 L_j 的矩会被用到：

$$E[L_j^k]=\frac{\mu_{k+1}}{\mu_1(k+1)},\quad k=1,2,\cdots. \tag{4.73}$$

因为 $E[M]=\frac{1}{\theta}$, 所以

$$\int_0^\infty \psi(u)du=\frac{\mu_2}{2\theta\mu_1}. \tag{4.74}$$

还可以证明

$$\mathrm{Var}[L]=\frac{\mu_3}{3\theta\mu_1}-\frac{\mu_2^2}{4\theta^2\mu_1^2}, \tag{4.75}$$

于是

$$\int_0^\infty u\psi(u)du=\frac{1}{2}E[L^2]=\frac{\mu_3}{6\theta\mu_1}. \tag{4.76}$$

做完这些准备工作之后，我们现在可以推导出一系列的近似公式了.

1. 用一个具有相同期望值的指数分布来取代理赔分布，可以得到 (见 (4.23))：

$$\psi(u)\approx\frac{1}{1+\theta}\exp\left(-\frac{\theta}{1+\theta}\frac{u}{\mu_1}\right). \tag{4.77}$$

当 $u=0$ 时，这个近似公式是准确的，但是在一般情况下左右两边的积分是不等的.

2. 用 $\psi(0)e^{-ku}$ 来近似 $\psi(u)$, 其中 k 要使得 (4.74) 成立，这样便得到近似公式

$$\psi(u)\approx\frac{1}{1+\theta}\exp\left(\frac{-2\theta\mu_1 u}{(1+\theta)\mu_2}\right). \tag{4.78}$$

注意到如果理赔服从 $\mathrm{Exp}(1/\mu_1)$ 分布，则 $\mu_2=2\mu_1^2$, 所以 (4.77) 和 (4.78) 均给出了准确的破产概率.

3. 我们可以用一个伽玛分布来近似破产概率：

$$\psi(u)\approx\frac{1}{1+\theta}(1-G(u,\alpha,\beta)),\quad u\geqslant 0. \tag{4.79}$$

为了使得前两个矩相同，伽玛分布 $G(\cdot;\alpha,\beta)$ 中的参数 α 和 β 必须满足如下条件：

$$E[L]=\frac{1}{1+\theta}\frac{\alpha}{\beta},\quad E[L^2]=\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha}{\beta^2}\right). \tag{4.80}$$

4. 正如第一个近似公式那样，我们还可以寻找另一个分布函数来替代理赔分布，使得它们的许多矩都相等，还要使得破产概率易于计算. 一个合适的候选者是指数分布的混合或者组合.

5. 另一个可能的替换是离散分布. 破产概率可以很容易地由 (4.70) 来计算. 对每一个理赔分布，我们可以找一个具有相同的前三阶矩的两点分布来替换. 不过这个办法在指数分布的混合 / 组合情形下并非总是可行的. 两个方法都可以得到好的近似公式.

6. 由风险排序的理论知，如果我们用一个在 μ 处的单点分布来取代具有期望 μ 的理赔分布的话，那么可以得到破产概率的一个下界估计. 当理赔额的最大值 b 已知时，我们还可以得到一个简单的上界估计. 如果理赔分布分别以概率 μ/b 取 b, 以概率 $1-\mu/b$ 取 0, 则一个新的泊松过程便出现了 (该过程等价于理赔额总是 b 且理赔次数参数是 $\lambda\mu/b$ 而不是 λ 的一个泊松过程). 所以上界和下界都可以由对应于 $m=1$ 的 (4.70) 来计算.

7. 如果个体理赔是取整值的，则几何分布使得我们可以利用 Panjer 递推法. 但是 L 中的项 L_j 并不是取整值的 (见公式 (4.51)). 不过用下面的凑整法我们可以容易地导出破产概率的上下界. 通过简单地把 L_j 往下凑成 δ 的整数倍的办法可以得到一个随机变量 L', 该随机变量适宜于运用 Panjer 递推算法. 由于 $\Pr[L\leqslant u]\leqslant\Pr[L'\leqslant u]$, 这样便给出了 $F_L(u)$ 的一个上界. 同样，往上凑整会得到 $F_L(u)$ 的一个下界. 最后，通过取 δ 充分小，经过少量的计算我们可以得到颇为精确的上下界估计.

§4.10 习 题

§4.2

1. 设等待时间 $W_1, W_2, \cdots$ 是一个独立同分布的随机变量序列，分布函数为 $F(x)$, 密度函数为 $f(x)$, $x\geqslant 0$. 给定 $N(t)=i$ 和 $T_i=s$, 其中 $s\leqslant t$, 求事件 “在时刻 t 和 $t+dt$ 之间发生一个理赔” 的 *条件* 概率. (我们称这个关于泊松过程的推广为 *更新过程*.)

2. 设 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 是一个参数为 λ 的泊松过程， 记 $p_n(t)=\Pr[N(t)=n]$, $p_{-1}(t)\equiv 0$. 证明 $p_n'(t)=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)$, $n=0,1,2,\cdots$, 通过比较 $p_n(t)$ 和 $p_n(t+dt)$ 来解释这些公式.

§4.3

1. 证明 (4.11) 中的那些表达式实际上等价于 (4.10).

2. 利用不等式 $e^{rx}>1+rx+\frac{1}{2}(rx)^2$ (其中 $r>0, x>0$) 来证明 $R<2\theta\mu_1/\mu_2$.

3. 当 $\theta=0.4$ 和 $p(x)=\frac{1}{2}(3e^{-3x}+7e^{-7x})$ 时，确定使得 $m_X(t)$ 有限的 t 的取值范围，再求 R.

4. 已知理赔服从离散分布 $p(1)=p(2)=\frac{1}{2}$ 且 $R=\log 3$, 求 θ.

5. 什么样的保费会使得 $e^{-Ru}=\varepsilon$ 成立？

6. [♠] 设 $\Pr[X=j]=\frac{1}{4}, j=0,1,2,4$, 对 $\lambda=1$ 和 $c=3$, 用电子制表软件来求 R.

7. 在一个 $\theta=\frac{2}{5}$ 的破产过程中，理赔 X 按照如下方式形成：首先，Y 分别以概率 $\frac{1}{2}$ 取两个可能的值 3 和 7. 然后，在条件 $Y=y$ 下理赔 X 服从一个 $\mathrm{Exp}(y)$ 分布. 求调节系数 R. 如果对同样的分布有 $R=2$, 那么 θ 会大于还是小于 $\frac{2}{5}$?

8. 在某个破产过程中，个体理赔服从一个 $\Gamma(2,1)$ 分布. 试求相对安全附加系数 θ 作为调节系数 R 的函数关系. 再求 $R(\theta)$. 如果调节系数等于 $\frac{4}{3}$, 是否有 $\theta=2$? 用理赔矩母函数的草图来讨论 R 作为 θ 的函数的变化情况.

9. [♠] 如果在破产过程中理赔服从一个对数正态分布，请讨论如何求解调节系数 R. 如果理赔服从逆高斯分布呢？

10. 对 $dc/dR\geqslant 0$ 进行讨论. 使用关系式 $c=\frac{1}{R}\log(m_S(R))$ (其中 S 表示长度为 1 的时间区间上的理赔总额) 来证明一个指数保费随着参数 (风险厌恶系数)α 的增大而增大.

§4.4

1. 由定理 4.4.1 我们知当 $\theta\downarrow 0$ 时有 $\psi(u)\to 1$. 为什么由此可以推出在 $\theta<0$ 时有 $\psi(u)=1$?

2. 什么样的复合泊松过程使得破产概率满足 $\psi(u)=\frac{1}{2}e^{-u}$?

3. 对于一个复合泊松过程，连续破产概率与初始资本金 u 之间的函数关系为 $\psi(u)=\alpha e^{-u}+\beta e^{-2u}$. 求这个过程的调节系数. 我们可以得到关于该过程的泊松参数的一些信息吗？$E[\exp(-RU(T))|T<\infty]$ 等于多少？

4. 设 $\psi(\varepsilon)<1$. 试通过考察事件 "在 ε/c 前没有破产或没有理赔发生" (其中 c 表示单位时间的保费收入) 来证明 $\psi(0)<1$.

5. 对于某个风险过程，给定 $\theta=0.4$ 和 $p(x)=\frac{1}{2}(3e^{-3x}+7e^{-7x})$. 试问在数字 0, 1 和 6 中哪些是调节系数方程 $1+(1+\theta)\mu_1 R=m_X(R)$ 的根？哪一个是真正的调节系数？

已知下面的四个表达式中有一个表示该过程的破产概率；请确定到底是哪一个，并讨论为什么其它三个表达式不可能是破产概率.

(1) $\psi(u)=\frac{24}{35}e^{-u}+\frac{1}{35}e^{-6u}$;

(2) $\psi(u)=\frac{24}{35}e^{-u}+\frac{11}{35}e^{-6u}$;

(3) $\psi(u)=\frac{24}{35}e^{-0.5u}+\frac{1}{35}e^{-6.5u}$;

(4) $\psi(u)=\frac{24}{35}e^{-0.5u}+\frac{11}{35}e^{-6.5u}$.

6. 已知某个破产过程的破产概率满足 $\psi(u)=\frac{1}{5}e^{-u}+\frac{2}{5}e^{-0.5u}, u\geqslant 0$. 我们知道，对于一般的破产过程来说有 $\lim_{u\to\infty}\psi(u)/e^{-Ru}=c$ 对某个 $c\in(0,1)$ 成立. 试利用这个事实来求本题的调节系数 R 和适当的常数 c.

§4.5

1. 设 G_i 的分布满足 $\Pr[G_i=+1]=p$ 和 $\Pr[G_i=-1]=q=1-p$. 又设 $p>\frac{1}{2}$ 且 u 是一个整数. 试在条件 $\widetilde{T}<\infty$ 下来求 $U(\widetilde{T})$. 用 $\widetilde{R}$ 把 $\widetilde{\psi}(u)$ 表示出来，再用 p 和 q 把 $\widetilde{R}$ 和 $\widetilde{\psi}(u)$ 表示出来.

2. [♠] 设保险人使用一个风险厌恶系数为 α 的指数效用函数 $w(\cdot)$. 求证 $E[w(U_{n+1})|U_n=x]\geqslant w(x)$ 成立当且仅当 $\alpha\leqslant\widetilde{R}$, 并解释这个结果.

3. 如果离散和连续风险过程都是由同一个复合泊松过程确定，试证以概率 1 有 $\widetilde{T} \geqslant T$ 成立，再证 $\widetilde{\psi}(u) \leqslant \psi(u)$ 对所有的 u 成立.

4. 设对任何一个初始资本金 u 和某个常数 α, 复合泊松过程的连续无限时间破产概率等于 αe^{-u}. 再设理赔服从一个参数为 2 的指数分布，且一年的期望理赔总额等于 50. 试求该过程的相对安全附加系数，同时给出离散无限时间破产概率的一个上界.

§4.6

1. 设某个保险保单组合产生的理赔过程是一个复合泊松过程，其中 $\lambda = 1$, $p(x) = e^{-x}$, $x > 0$, 相对安全附加系数为 θ. 在扣除一个相对安全附加系数等于 $\xi > 0$ 的比例再保险 $h(x) = \alpha x$ 后，求调节系数. 计算再保之后的相对安全附加系数. 哪些因素对 α 起制约作用？

2. 同上一题，但是现在使用超额损失再保险 $h(x) = (x - \beta)_+$, 试建立关于调节系数的方程，并求再保后的相对安全附加系数.

3. 设每年的理赔额 W_i, $i = 1, 2, \cdots$, 服从正态 $N(5, 1)$ 分布， $\theta = 0.25$. 再保商使用保费相对安全附加系数 $\xi = 0.4$, 赔付每个风险的比例等于 α. 试给出该再保保单组合的调节系数 $\widetilde{R}$ 关于 α 的函数关系.　α 取什么值会使得保险人最安全？

4. 设理赔总额过程是一个复合泊松过程，　其中 $\lambda = 1$, $p(x) = e^{-x}$, $x \geqslant 0$, 相对安全附加系数是 $\theta = \frac{1}{2}$. 再设公司进行了比例再保险 $h(x) = \alpha x$, 再保商的相对安全系数等于 1. 试求调节系数 R_h, 并问 α 取哪些值使得破产不会必然发生？

§4.7

1. 如果理赔 (a) 以概率 1 等于 b, 或 (b) 服从一个指数分布，　求 L_1 的矩母函数.

2. 证明 $\Pr[L = 0] = 1 - \psi(0)$.

3. 在习题 §4.4 第 3 题和 §4.4 第 6 题中， θ 是多少？

§4.8

1. 当常数 γ 等于多少时， $\gamma(-\psi'(u))$, $u > 0$, 是一个密度函数？

2. 分别对指数分布的某个适当的组合和 $\Gamma(2, \beta)$ 分布绘制出类似于图 4.4 那样的草图来确定 (4.61) 的渐近线.

3. 如果 $\psi(u) = 0.3e^{-2u} + 0.2e^{-4u} + \alpha e^{-6u}$, $u \geqslant 0$, 求 θ 和 R. 考虑到 $\psi(u)$ 随 u 递减以及相对安全附加系数 θ 是一个正数，请问 α 宜取哪些值？

4. 如果 $\lambda = 3$, $c = 1$ 且 $p(x) = \frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{16}{3}e^{-6x}$, 求 μ_1, θ, m_X, (4.61), 且推导 $\psi(u)$ 的一个解析表达式.

5. 借助于 (4.17) 来求上一题中的 $E[e^{-RU(t)}]$. 请给出三个独立随机变量 X, Y 和 I 使得 $IX + (1 - I)Y$ 具有密度 $p(\cdot)$.

6. 要求同习题 §4.8 第 4 题，但是现在 $p(x)$ 是 $\Gamma(2, \frac{3}{5})$ 的密度， $\lambda = 1$ 且 $c = 10$.

7. 设 $\theta = \frac{5}{7}$, 理赔 $X_i = Y_i/4 + Z_i/3$, 其中 Y_i 和 Z_i 独立且均服从 $\mathrm{Exp}(1)$ 分布. 试求 $\psi(u)$.

8. 在离散理赔分布下绘制 L_j 的密度函数的草图.

9. [♠] 当 $m = 1$ 和 $m = 2$ 时，证明 (4.70).

10. 设一个破产过程的个体理赔等于两个服从 $\mathrm{Exp}(1)$ 分布的独立随机变量的最大值，即 $X_i = \max\{Y_{i1}, Y_{i2}\}$, 其中 $Y_{ik} \sim \mathrm{Exp}(1)$. 求 X_i 的分布函数，并利用这个结果证明对应的密度

函数 $p(x)$ 是指数分布的一个组合. 确定相对安全附加系数 θ, 使得调节系数分别为 $R=0.5$ 和 $R=2.5$.

11. 设有两个公司, 记为公司 1 和公司 2, 它们的破产过程均为复合泊松过程, 其强度分别为 $\lambda_1=1$ 和 $\lambda_2=8$, 理赔分布分别为 Exp(3) 和 Exp(6) 分布, 且相对安全附加系数分别为 $\theta_1=1$ 和 $\theta_2=\frac{1}{2}$. 两个公司的理赔过程相互独立. 这两个公司决定合并, 但是不改变它们的保费. 试求合并后的公司破产过程的理赔到来强度、理赔分布和相对安全附加系数. 设两个公司的初始资本金均为 0, 那么显然合并后的公司的初始资本金也为 0, 请比较下面两个事件的概率 (连续无限时间破产概率): "两个公司都永不破产" 与 "合并后的公司永不破产". 请说明, 无论两个单独的公司初始资本金 u_1 和 u_2 为多少 (从而无论合并后的公司初始资本金 u_1+u_2 为多少), 事件 "两个公司都永不破产" 的概率小于事件 "合并后的公司永不破产" 的概率.

§4.9

1. 验证 (4.72), (4.73), (4.75)/(4.76), 和 (4.80). 从 (4.80) 中求解 α 和 β.

2. 补出最后那个近似公式的一些细节.



第 5 章　保费原理

§5.1　引　言

保险公司的业务可以用一个输入输出系统来描述. 在这个系统中, 盈余由于征收的保费和赚取的利息而增加, 由于理赔和成本支出而减少 (参见上一章). 在本章中, 我们将讨论若干利用理赔额分布来确定保费的数学方法. 从精算的角度来看, 保费计算就是要求出这么一个最小保费, 它不仅足以应付理赔, 而且还使得所考虑的保单组合的期望盈余足够快地增长.

Bühlmann (1985) 描述了关于保费计算的上下 (top-down) 方法: 首先着眼于整个保单组合必需的保费, 其次再考虑将总保费以一个 "公平的" 方式分配到每个保单上去. 为了确定最小年保费, 我们利用上章引入的 (满足一些简化假设条件) 离散时间模型破产概率, 得到的结果是指数保费 (见第 1 章), 其中的参数由所能容许的最大破产概率和初始资本金来确定. 假设提供初始资本金的那些人应得到一定的年度红利, 并且所求得的保费应该尽可能低, 以具有尽可能强的竞争性, 那么我们可以推导出最优的初始资本金. 此外, 我们还要说明总保费在达到我们目标的前提下是如何以一种公平的方式被分配到每个保单上的.

关于保单保费问题, 我们可以使用的保费原理很多. 有些保费原理可以由类似于零效用模型的模型来推导出来, 这里保险前后的期望效用相等. 另外一些保费原理可以作为指数保费原理的近似来得到. 我们将要验证这些保费原理在多大程度上能够满足一系列的合理要求, 以及研究保费原理的一些刻画. 例如, 可以证明: 满足 "独立保单的总保费等于个体保费之和" 且保持效用不变的保费原理只能是纯保费和指数保费.

作为一个应用, 我们将要分析当若干个保险公司希望 "联营" 时他们必须如何运作. 结果表明, 如果每个保险公司承担总风险的一个固定份额 (共保) 且该份额与公司的风险厌恶系数成反比, 则这时得到的总保费最具竞争力 (见 Gerber (1979)).

§5.2　利用上下方法计算保费

如第 4 章所述, 承保一个风险组合的盈余会随着收取的保费而增加, 随着理赔的发生而减少. 在离散时间破产模型中如下等式成立:

$$U_t = U_{t-1} + c - S_t, \quad t = 1, 2, \cdots. \tag{5.1}$$

如果在某个时刻 t 有 $U_t < 0$, 那么破产就发生了. 我们假设年理赔总额 S_t, $t = 1, 2, \cdots$, 独立且共同服从于一个复合泊松分布, 记为 $S_t \sim S$. 于是出现了如下问题: 初始资本金 $U_0 = u$ 与保费 $c = \pi[S]$ 必须多大时, 破产发生的概率才不会过大? 破产概率的上界为 e^{-Ru}, 其中 R 为调节系数, 即方程 $e^{Rc} = E[e^{RS}]$ 的根 (见 §4.5). 注意到在上述条件下离散调节系数 $\widetilde{R}$ 和通常的调节系数 R 相等. 如果我们将上界设定为 ε, 那么 $R = |\log\varepsilon|/u$. 于是, 将保费 c 定为

$$c = \frac{1}{R}\log(E[e^{RS}]), \quad 其中\ R = \frac{1}{u}|\log\varepsilon|, \tag{5.2}$$

我们便得到了一个以 ε 为上界的破产概率. 该保费就是参数为 R 的指数保费 (1.20). 由例 1.3.1 可知, 调节系数 可以解释为厌恶风险程度的一个度量: 对于具有风险厌恶系数 α 的效用函数 $-\alpha e^{-\alpha x}$, 保持效用不变的保费是 $c = \frac{1}{\alpha}\log(E[e^{\alpha X}])$.

指数保费的一个特征在于: 如果对每个保单都选择这个保费, 则简单相加便得到了 S 对应的总保费. 事实上, 设 X_j 为保单 j 的赔付额, $j = 1, \cdots, n$, 当它们相互独立时, 读者可以验证:

$$S = X_1 + \cdots + X_n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R}\log(E[e^{RS}]) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R}\log(E[e^{RX_j}]). \tag{5.3}$$

另一个在上述意义下可加的保费原理是 *方差保费原理*, 即对于某个参数 $\alpha \geqslant 0$, 保费由下面的公式而定:

$$\pi[S] = E[S] + \alpha\mathrm{Var}[S]. \tag{5.4}$$

该保费也可以看作是对指数保费的一个近似: 设风险厌恶系数 R 较小, 我们只考虑累积量母函数 Taylor 展开式的前两项, 即

$$\pi[S] = \frac{1}{R}\kappa_S(R) = \frac{1}{R}\left(E[S]R + \frac{R^2}{2} + \cdots\right). \tag{5.5}$$

当用 (5.4) 来近似 (5.5) 时, α 必须等于 $\frac{1}{2}R$. 由 (5.2) 和 $\widetilde{\psi}(u) \leqslant e^{-Ru}$, 我们可以粗略地说:

- 如果将 (5.4) 中 α 扩大一倍, 那么破产概率将从 ε 减少到 ε^2;
- 如果在保持最大破产概率不变的情况下想把初始资本下降一半, 则需要将 α 增加一倍.

下面我们考虑关于离散时间破产模型 (5.1) 的一个新问题: 如果保费 c 要包含股东 (即初始资本 u 的提供者) 一年的红利, 那么 u 应该多大? 考虑到这个因素, 我们取如下形式的保费:

$$\pi[S] = E[S] + \frac{|\log\varepsilon|}{2u}\mathrm{Var}[S] + iu, \tag{5.6}$$

该保费是依据 (5.2), (5.4) 与 (5.5), 再加上红利 iu 而形成的. 我们应当选取 u 使得保费越具有竞争性越好 (即越低越好). 对 u 求导并令导数为 0, 可见最小值在 $u=\sigma[S]\sqrt{|\log\varepsilon|/2i}$ 处达到. 将该 u 值代入 (5.6) 可得到最优保费是一个标准差保费:

$$\pi[S]=E[S]+\sigma[S]\sqrt{2i|\log\varepsilon|}. \tag{5.7}$$

在最优情形, 附加保费 $\pi[S]-E[S]-iu$ 等于红利 iu; 注意当 i 增加时 u 减少, 但 iu 增加.

最后, 我们还得确定对保单组合里的每个保单应该征收多少保费. 此时我们不可以简单地要求附加保费与标准差成比例. 由于独立风险变量的保费之和并不等于风险变量和的保费, 因此整个保单组合水平上的保费是不平衡的: 如果我们增加一个保单合同, 那么总保费就不再满足那些条款了. 另一方面, 如前所述, 与指数保费以及纯保费一样, 方差保费原理是可加的. 于是, 由 (5.6) 与 (5.7) 得到关于保费计算的如下建议:

1. 对于 S, i 以及 ε 计算最优初始资本 $u=\sigma[S]\sqrt{|\log\varepsilon|/2i}$;
2. 通过征收如下形式的保费, 把总保费分配到个体风险 X_j 上去:

$$\pi[X_j]=E[X_j]+R\mathrm{Var}[X_j],\quad 其中\ R=|\log\varepsilon|/u. \tag{5.8}$$

注意此时方差保费原理的负荷因子 $R=\alpha$ 恰好等于其在没有红利时的两倍 (见 (5.4) 和 (5.5)). 总红利以及为了避免破产而对期望盈余增长进行的必要投入等以一种类似的方式被分配到每个保单上去.

Bühlmann 给出了一个包含两类指数型风险保单组合的例子:

类型	风险个数	期望值	方差	指数保费	方差保费	标准差保费
A	5	5	25	$-\frac{1}{R}\log(1-5R)$	$5+\frac{R}{2}25$	
B	20	1	1	$-\frac{1}{R}\log(1-R)$	$1+\frac{R}{2}1$	
总和	25	45	145			$45+(2i\|\log\varepsilon\|145)^{\frac{1}{2}}$

选取 $\varepsilon=1\%$, 则 $|\log\varepsilon|=4.6052$. 于是对于包含红利的模型我们有如下关于不同 i 值的方差保费表:

	组合保费	u 的最优值	R 的最优值	组合 A 的保费	组合 B 的保费
$i=2\%$	50.17	129.20	0.0356	5.89	1.0356
$i=5\%$	53.17	81.72	0.0564	6.41	1.0564
$i=10\%$	56.56	57.78	0.0797	6.99	1.0797

组合保费和最优的 u 由 (5.7) 求得， R 由 (5.2) 求得， A 型和 B 型风险的保费可按照 (5.8) 来求得. 我们还注意到如下现象：

- 初始资本 u 的提供者要求的回报 i 越高， u 的最优值就越低；
- 负荷与风险保费远不成比例：按照一个百分比来计算， A 型风险的负荷是 B 型风险的负荷的 5 倍；
- 求得的指数保费几乎是相同的：如果 $i = 2\%$, 那么 A 型风险的参数值为 $2R$ 的保费是 6.18, 而 B 型风险对应保费是 1.037.

§ 5.3 各种保费原理

本节我们将列举各种保费原理，它们既可以应用于单个保单，也可以应用于保单组合. 下节还将给出保费原理应当满足的一些数学性质 (不过也有人对这些数学性质持异议). 一个随机变量的保费原理仅仅依赖于其分布函数. 因此，当 F_X 是 X 的分布函数时，我们会使用记号 $\pi[F_X]$ 或者 $\pi[X]$ 来表示 X 的保费. 我们假设 X 是一个 *有界* 随机变量. 这里讨论的大多数保费原理也适用于无界的或者负的理赔变量场合，不过这时有可能会导致保费等于无穷，即意味着这样的风险变量不可保.

在 §5.2 中，我们已经遇到下面五种类型保费原理：

(a) **纯保费原理**: $\pi[X] = E[X]$.

该原理也称为等价原理， 它只适用于风险中性的保险人.

(b) **期望值保费原理**: $\pi[X] = (1+\alpha)E[X]$. 这里附加保费等于 $\alpha E[X]$, 其中 $\alpha > 0$ 是参数.

(c) **方差保费原理**: $\pi[X] = E[X]+\alpha$. 这里附加保费与方差成正比, 其中 $\alpha > 0$ 仍是参数.

(d) **标准差保费原理**: $\pi[X] = E[X] + \alpha\sigma[X]$, 其中 $\alpha > 0$ 为参数.

(e) **指数保费原理**: $\pi[X] = \frac{1}{\alpha}\log(m_X(\alpha))$. 这里的参数 $\alpha > 0$ 称为风险厌恶系数. 我们在第 1 章中已经指出，指数保费随着 α 增加而增加. 此外，当 $\alpha \downarrow 0$ 时，可以得到纯保费；当 $\alpha \to \infty$ 时，保费趋于 X 可能取到的最大值 (见习题 §5.3 第 11 题).

在接下来的两个保费原理中， “参数” 是一个函数，因此我们也可以称之为保费模型.

(f) **零效用保费**： $\pi[X] \leftarrow u(0) = E[u(\pi[X] - X)]$.

我们已经在第 1 章中讨论过这个概念. 函数 $u(x)$ 表示一个决策者附加于其当前资本与 x 之和上的效用. 所以 $u(0)$ 表示当前资本的效用，而 $u(\pi[X]-X)$ 表示对风险变量 X 投保 (从而缴纳保费 $\pi[X]$) 之后的效用. 满足效用平衡方程的保费称为零

效用保费$u(\cdot)$ 的任意一个线性变换都对应同样的保费. 我们通常假定函数 $u(\cdot)$ 为非降凹函数, 从而它具有正的单调减的边际效用 $u'(x)$. 特别地, 取 $u(x) = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha x})$ 可以得到指数保费; 取 $u(\cdot)$ 为线性函数可以得到纯保费 (见第 1 章).

(g) **平均值保费原理**: $\pi[X] = v^{-1}(E[v(X)])$.

函数 $v(\cdot)$ 为一个单调增且凸的估价函数. 易见, 纯保费和指数保费分别对应于 $v(x) = x$ 和 $v(x) = e^{\alpha x}$, 其中 $\alpha > 0$.

下面这些保费原理只是在理论上有意义:

(h) **百分比保费原理**: $\pi[X] = \min\{p|F_X(p) \geqslant 1 - \varepsilon\}$.

易见, 使用该原理时保险人招致损失的概率至多为 ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$.

(i) **最大损失保费原理**: $\pi[X] = \min\{p|F_X(p) = 1\}$.

该保费是作为其它保费的一个极限情形出现的: 在 (e) 中取 $\alpha \to \infty$ 以及在 (h) 中取 $\varepsilon \downarrow 0$ 都会得到最大损失保费. 一个 "实际的" 例子: 假设一位孕妇买了一个保单以保她要生育的孩子是女孩; 如果她生了男孩, 则保费全额退还.

(j) **Esscher 保费原理**: $\pi[X] = E[Xe^{hX}]/E[e^{hX}]$, 这里 $h > 0$ 为参数.

该保费实际上是风险变量 $Y = Xe^{hX}/m_X(h)$ 的纯保费. 不难看出, 在从 X 到 Y 的变换中, 大值增大了, 小值减小了. 该原理也可以看作是 $dF_X(x)$ 的所谓 Esscher 变换的期望值, 该变换的 "密度" 为

$$dG(x) = \frac{e^{hx}dF_X(x)}{\int e^{hy}dF_X(y)}. \tag{5.9}$$

这是一累积分布函数的微分, 其值域和 X 的相同, 不过取小值的概率减小了, 取大值的概率增大了. 通过作这样一个变换, 我们得到了一个 "安全的" 保费.

§ 5.4 保费原理的性质

下面我们给出保费原理 $\pi[X]$ 应该满足的五个性质. 其它有用的性质如保序性 (即 "较小" 的风险应该对应较少的保费) 等并没有在此涉及到. 有关保序性的讨论见第 10 章.

(1) **附加保费的非负性**: $\pi[X] \geqslant E[X]$.

没有附加的保费将肯定导致破产.

(2) **无敲诈性**: $\pi[X] \leqslant \min\{p|F_X(p) = 1\}$.

最大损失保费原理 (i) 考虑的是风险变量有界的情形. 当风险变量 X 无界时, 保费为无穷大.

(3) **相容性**: 对每一个 c 有 $\pi[X + c] = \pi[X] + c$.

如果理赔额被增加了某个固定的量 c, 那么保费也应该被增加一个相同的量. 相容性又称为*平移不变性*. 注意本章涉及到的风险变量未必是非负随机变量, 不过

为了克服一些技术上的问题我们总是假定它们有下界.

(4) **可加性**: 对任何独立的风险变量 X 和 Y, 有 $\pi[X+Y]=\pi[X]+\pi[Y]$.

该性质描述的是将独立的风险变量集中在一起不影响保费总额.

(5) **平滑性**: 对于任何风险变量 X 和 Y, 有 $\pi[X]=\pi[\pi[X|Y]]$.

风险变量 X 的保费可以分两步来计算. 首先, 运用保费原理 $\pi[\cdot]$ 来计算给定 $Y=y$ 时 X 的条件保费. 于是得到一个关于 y 的函数, 它仍然是一个随机变量, 记为 $\pi[X|Y]$. 然后对该随机变量运用同样的保费原理. 对于满足平滑性的保费原理来说, 分两步计算出来的保费与直接计算出来的保费 $\pi[X]$ 相同.

纯保费原理的平滑性直接由条件期望公式 (2.7) 的平滑性得到. 乍一看这个法则似乎矫揉造作, 没有什么实际意义. 但事实却不然. 我们可以给出如下解释: 假设某个驾驶员一年之内发生事故的次数为一个泊松随机变量 N, 其参数 λ 来自于某个结构变量 Λ. 事故次数是波动的, 这是不仅由于泊松随机变量 N 本身会偏离其均值 λ, 而且由于结构分布的波动性. 当保费原理满足平滑性时, 依次按照 N 产生波动的两个原因来计算 N 的保费, 我们得到结果应与直接计算出来的结果一致.

例 5.4.1(指数保费原理的平滑性) 指数保费原理具有平滑性. 证明如下:

$$\begin{aligned}\pi[\pi[X|Y]] &= \frac{1}{\alpha}\log E[e^{\alpha\pi[X|Y]}]=\frac{1}{\alpha}\log E\left[\exp\left(\alpha\frac{1}{\alpha}\log E[e^{\alpha X}|Y]\right)\right]\\ &= \frac{1}{\alpha}\log E\left[E[e^{\alpha X}|Y])\right]=\frac{1}{\alpha}\log E[e^{\alpha X}]=\pi[X].\end{aligned} \tag{5.10}$$

通过对一个指数保费取期望, 原先所做的变换可以成功地去除. ∇

例 5.4.2(复合分布) 设 $\pi[\cdot]$ 既满足可加性又满足平滑性, 再设 S 是由 N 个与 X 同分布的独立随机变量组成的一个复合分布. 则 S 的保费等于

$$\pi[S]=\pi[\pi[S|N]]=\pi[N\pi[X]]. \tag{5.11}$$

进一步, 如果 $\pi[\cdot]$ 是齐次的, 即对一切 $\alpha\geqslant 0$ 有 $\pi[\alpha X]=\alpha\pi[X]$ 成立, 那么 $\pi[S]=\pi[X]\,\pi[N]$. 一般来说齐次性是不成立的 (见 §1.2). 不过该性质可以作为一个局部工作假设而被用来计算一组类似合同的保费; 没有齐次性的话, 使用价目表也就毫无意义了. ∇

我们在表 5.1 中总结了各种保费原理的性质. "+" 表示该性质一般成立, "−" 表示一般不成立, 而 "e" 表示只有在指数保费 (包括纯保费) 情形下才成立. 我们总是假定 S 有下界. 这些性质的证明均放在习题中留给读者去完成. 不过, 对于命题 "满足一定附加条件的零效用保费和平均值保费原理一定是指数保费原理" 的证明, 可参阅下一节.

表 5.1　各种保费原理及其性质

原理	(a) μ	(b) $1+\lambda$	(c) σ^2	(d) σ	(e) exp	(f) $u(\cdot)$	(g) $v(\cdot)$	(h) %	(i) max	(j) E
性质										
1) $\pi \geqslant E[X]$	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+
2) $\pi \leqslant \max[X]$	+	−	−	−	+	+	+	+	+	+
3) $\pi[X+c]$	+	−	+	+	+	+	e	+	+	+
4) $\pi[X+Y]$	+	+	+	−	+	e	e	−	+	+
5) $\pi[\pi[X\|Y]]$	+	−	−	−	+	e	+	−	+	−

综上所述，只有指数保费原理，最大损失保费原理和纯保费原理满足所有这些性质．鉴于最大损失保费原理和纯保费原理的实际意义不大，只有指数保费原理才符合这样的挑选准则 (见 §5.2)．指数保费原理的一个不足之处在于决策者所做的决策不依赖于当前他已获得的资本金．不过换一句话说，这也是该原理的一个显著特点，因为在每一时刻的当前资本金通常是随机的或者难以精确知道的，不需要知道当前资本金就可以做决策当然是方便多了．

§5.5　保费原理的刻画

本节我们研究表 5.1 中标注 e 的那些性质以及保费原理的一些其他的刻画．注意在 (f) 和 (g) 中，函数 $u(\cdot)$ 和 $v(\cdot)$ 的线性变换都产生同样的保费．在证明只有指数效用函数 $u(\cdot)$ 才满足的某个性质时，我们的证明技巧是先把该性质应用到具有一个简单结构的风险变量上去，然后再推导出一个关于 $u(\cdot)$ 微分方程，且该微分方程只能对指数函数和线性函数成立．因为线性效用函数是指数效用函数的极限，本节我们不再一一明确提及线性效用函数．本节定理的完整证明可参阅 Gerber(1979, 1985) 和 Goovaerts 等 (1984)．

下面定理研究了表 5.1 中标注 "e" 的那些性质．

定理 5.5.1(指数保费原理的刻画)　如下的四个命题成立：

1. 满足相容性的平均值保费原理是指数原理．
2. 满足可加性的平均值保费原理是指数原理．
3. 满足可加性的零效用保费原理是指数原理．
4. 满足平滑性的零效用保费原理是指数原理．

证明　对于平均值原理来说，当 $\Pr[X=c]=1$ 时有 $\pi[X]=c$，可见当两个风险变量退化时相容性恰好是可加性，所以由命题 1 可以推出命题 2 成立．命题 1 的证明将在下面给出，在证明中我们首先把相容性应用到 x 与某个 Bernoulli(q) 风险变量之和上面，再计算在 $q=0$ 处的二阶导数以推证出估价函数 $v(\cdot)$ 满足的一

个微分方程 $\frac{v''(x)}{v'(x)}$ = 某个常数，并且该方程只有当 $v(\cdot)$ 为线性函数和指数函数时才能满足．命题 4 的证明方法与此大致相同．关于命题 3 的证明我们也是通过建立一个类似的方程来完成的，不过关于指数效用函数是该方程的唯一解的证明要困难得多．

为了证明命题 1，设平均值保费原理中的 $v(\cdot)$ 是单调增凸函数．记 $P(q)$ 为服从 Bernoulli(q) 分布的风险变量 S_q 的保费，该保费为 q 的函数．于是，由定义得

$$v(P(q)) = qv(1) + (1-q)v(0). \tag{5.12}$$

对方程两边求 $q=0$ 点的右导数得

$$P'(0)v'(0) = v(1) - v(0), \tag{5.13}$$

故 $P'(0) > 0$. 进一步，在 $q=0$ 处求二阶导数可得

$$P''(0)v'(0) + P'(0)^2 v''(0) = 0. \tag{5.14}$$

由相合性，对于任意常数 x, 有 $S_q + x$ 的保费等于 $P(q)+x$, 从而

$$v(P(q)+x) = qv(1+x) + (1-q)v(x). \tag{5.15}$$

对这个方程两边求 $q=0$ 点的二阶导数得

$$P''(0)v'(x) + P'(0)^2 v''(x) = 0. \tag{5.16}$$

注意到 $P'(0) > 0$, 于是对于一切的 x 我们有

$$\frac{v''(x)}{v'(x)} = \frac{v''(0)}{v'(0)}. \tag{5.17}$$

因此，当 $v''(0)=0$ 时，$v(\cdot)$ 是线性的；而当 $v''(0)>0$ 时，$v(\cdot)$ 是指数的． ∇

注 5.5.2(连续保费和可混合保费) 下面介绍保费原理的另一个有趣的刻画．一个保费原理 $\pi[\cdot]$ 称为是连续的，如果 $F_n \to F$(依分布收敛) 蕴涵了 $\pi[F_n] \to \pi[F]$; $\pi[\cdot]$ 称为可混合的，如果对任意的分布函数 F 和 G, 有 $\pi[tF+(1-t)G] = t\pi[F]+(1-t)\pi[G]$ 成立，并且对任意常数 c 和某个固定的 λ, 有 $\pi[c] = (1+\lambda)c$. 可以证明：如果一个保费原理 $\pi[\cdot]$ 是连续的和可混合的，则 $\pi[\cdot]$ 一定是期望值保费原理，即 $\pi[X] = (1+\lambda)E[X]$. ∇

最后我们给出 Esscher 保费原理的一个刻画．

定理 5.5.3 设一个保险人具有风险厌恶系数 α 的指数效用函数．如果他收取的保费具有形式 $E[\varphi(X)X]$, 其中 $\varphi(\cdot)$ 是一个连续单调增函数，满足 $E[\varphi(X)] = 1$,

那么当 $\varphi(x) \propto e^{\alpha x}$ 时 (也就是说, 当他使用参数为 α 的 Esscher 保费原理时), 他的效用达到最大.

证明　本定理的证明采用了变分法的技巧, 取自于 Goovaerts 等 (1984). 设 $u(\cdot)$ 是一个单调增且凸的效用函数, 并记 $Y=\varphi(X)$. 由于 $\varphi(\cdot)$ 连续且单调增, 我们有 $X=\varphi^{-1}(Y)$. 再记 $f(y)=\varphi^{-1}(y)$. 为了推导出一个充分条件使得 $E[u(-f(Y)+E[f(Y)Y])]$ 在 $E[Y]=1$ 的约束条件下关于一切连续且单调增的函数 $f(\cdot)$ 达到最大化, 我们来研究函数 $f(y)+\varepsilon g(y)$, 其中 $g(\cdot)$ 为任意的连续函数. 不难看出, $f(y)$ 最优而新函数 $f(y)+\varepsilon g(y)$ 不是最优意味着

$$\frac{d}{d\varepsilon}E\big[u\big(-f(Y)+E[f(Y)Y]+\varepsilon\{-g(Y)+E[g(Y)Y]\}\big)\big]\bigg|_{\varepsilon=0}=0. \tag{5.18}$$

(5.18) 右端导数等于

$$E\big[u'\big(-f(Y)+E[f(Y)Y]+\varepsilon\{-g(Y)+E[g(Y)Y]\}\big)\{-g(Y)+E[g(Y)Y]\}\big]. \tag{5.19}$$

当 $\varepsilon=0$ 时, 如果

$$\begin{aligned}&E\left[u'(-f(Y)+E[f(Y)Y])g(Y)\right]\\&=E\left[u'(-f(Y)+E[f(Y)Y])\right]E[g(Y)Y],\end{aligned} \tag{5.20}$$

则导数 (5.19) 式为 0. 记 $c=E\left[u'(-f(Y)+E[f(Y)Y])\right]$, (5.20) 可以改写为

$$E\left[\{u'(-f(Y)+E[f(Y)Y])-cY\}\{g(Y)\}\right]=0. \tag{5.21}$$

因为函数 $g(\cdot)$ 是任意的, 利用变分学中一个熟知的定理, 得到

$$u'(-f(y)+E[f(Y)Y])-c\,y=0. \tag{5.22}$$

代入 $x=f(y)$ 和 $y=\varphi(x)$, 可见

$$\varphi(x)\propto u'(-x+E[X\varphi(X)]). \tag{5.23}$$

如果 $u(x)$ 是指数型的且参数值为 α, 即 $u(x)=-\alpha e^{-\alpha x}$, 那么

$$\varphi(x)\propto e^{-\alpha(-x+E[X\varphi(X)])}\propto e^{\alpha x}. \tag{5.24}$$

由于 $E[\varphi(X)]=1$, 我们得到最优标准化权函数为 $\varphi(x)=e^{\alpha x}/E[e^{\alpha X}]$. 相应的保费就是具有参数值 $h=\alpha$ 的 Esscher 保费.　∇

请注意在 Esscher 保费中对于使得期望值 $E[\varphi(X)]$ 不同的风险变量使用了不同的权函数, 不过这些函数之间只差了一个常数因子.

§ 5.6 通过共保来降低保费

设有 n 个相互合作的保险人，保险人 i 使用参数为 α_i 的指数效用函数，$i = 1, 2, \cdots, n$. 他们打算共同来承保一个风险变量 S, 于是该风险变量就在他们之间分摊，即定义 n 个随机变量 $S_1, \cdots, S_n$ 满足

$$S \equiv S_1 + \cdots + S_n, \tag{5.25}$$

其中 S_i 是第 i 个保险人所面临的风险. 这里的 S 可以是一个他们想一起来承担的新风险，也可以是一个他们想重新分配的保单组合. 所需要的总保费是

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} \log E\left[e^{\alpha_i S_i}\right]. \tag{5.26}$$

该总保费依赖于 S_i 的选取. 保险人该如何分割风险 S 才能使得该联营尽可能具有竞争性 (即使得总保费 P 尽可能小)?

答案是保险人 i 的最优选择 $\widetilde{S}_i$ 应该为总风险 S 的一个固定部分:

$$\widetilde{S}_i = \frac{\alpha}{\alpha_i} S, \quad 其中 \quad \frac{1}{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}. \tag{5.27}$$

所以，每个保险人应承担联营风险的一个百分数且这个百分数与该保险人的风险厌恶系数的倒数成比例. 由 (5.27) 知，相应的最小总保费为

$$\widetilde{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} \log E\left[e^{\alpha_i \widetilde{S}_i}\right] = \frac{1}{\alpha} \log E\left[e^{\alpha S}\right]. \tag{5.28}$$

可见，这 n 个保险人的联营就像一个保险人一样，其保费由具有风险厌恶系数 α 的指数保费原理给出.

设 P 为对应于任意一个分割 $S_1 + \cdots + S_n \equiv S$ 的总保费，为证明 $\widetilde{P} \leqslant P$, 我们必须证明 (5.28) 比 (5.26) 小，即

$$\frac{1}{\alpha} \log E\left[\exp\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} S_i\right)\right] \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} \log E\left[e^{\alpha_i S_i}\right]. \tag{5.29}$$

此式可以被改写为

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{\alpha S_i}\right] \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(E\left[e^{\alpha_i S_i}\right]\right)^{\alpha/\alpha_i}. \tag{5.30}$$

(5.30) 又等价于

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{\alpha S_i}}{\left(E\left[e^{\alpha_i S_i}\right]\right)^{\alpha/\alpha_i}}\right] \leqslant 1, \tag{5.31}$$

或者说

$$E\left[\exp\left(\sum_i \frac{\alpha}{\alpha_i} T_i\right)\right] \leqslant 1, \quad \text{这里} \quad T_i = \log \frac{e^{\alpha_i S_i}}{E\left[e^{\alpha_i S_i}\right]}. \tag{5.32}$$

从而我们只需证明 (5.32) 即可. 注意 $E[\exp(T_i)] = 1$, 并且由定义知 $\sum_i \alpha/\alpha_i = 1$. 因为 e^x 是一个下凸函数, 所以对一切实数 $t_1, \cdots, t_n$, 有

$$\exp\left(\sum_i \frac{\alpha}{\alpha_i} t_i\right) \leqslant \sum_i \frac{\alpha}{\alpha_i} \exp(t_i). \tag{5.33}$$

由此可得

$$E\left[\exp\left(\sum_i \frac{\alpha}{\alpha_i} T_i\right)\right] \leqslant \sum_i \frac{\alpha}{\alpha_i} E\left[e^{T_i}\right] = \sum_i \frac{\alpha}{\alpha_i} = 1. \tag{5.34}$$

至此定理证完.　∇

如果在 (5.30) 中记 $X_i = \exp(\alpha S_i)$ 和 $r_i = \alpha/\alpha_i$, 那么便得到了著名的 Hölder 不等式 (见习题 §5.5 第 1 题, 其中 $n = 2, p = r_1, q = r_2$).

§ 5.7 习　题

§5.2

1. 证明 (5.7) 成立.

2. 在本节表中, 如果红利为 $i = 2\%$ 且 $\varepsilon = 5\%$, 结果如何? 求方差保费和指数保费.

§5.3

1. 设 $X \sim \text{Exp}(1)$ 分布. 试求保费 (a)~(e) 和 (h)~(j).

2. [♠] 通过验证关于 α 的导数为正来证明 $\pi[X;\alpha] = \log(E[e^{\alpha X}])/\alpha$ 是 α 的单调增函数 (见例 1.3.1).

3. 设一个车险保单组合的总理赔额服从复合泊松分布, 每个事故中的理赔额服从伽玛分布. 试求相对安全附加系数为 10% 的期望值保费.

4. 试求单个理赔服从伽玛分布的复合泊松风险的指数保费.

5. 计算习题 §5.3 第 3 题中给出的理赔分布的方差保费.

6. 证明 Esscher 保费等于 $\kappa_X'(h)$, 这里 κ_X 是 X 的累积量母函数.

7. 求下列分布的参数为 h 的 Esscher 密度变换: $\text{Exp}(\alpha)$ 分布, $B(n,p)$ 分布和 $\text{Poisson}(\lambda)$ 分布.

8. 证明 X 的 Esscher 保费是参数 h 的增函数.

9. 求复合泊松分布的 Esscher 保费.

10. 证明：当 α 很小时，Esscher 保费原理归结为方差保费原理.

11. 设 X 是一有限风险且具有最大值 b (从而 $\Pr[X \leqslant b] = 1$, 而对所有的 $\varepsilon > 0$ 有 $\Pr[X \geqslant b-\varepsilon] > 0$ 成立). 记 π_α 为 X 的指数保费. 证明：$\lim_{\alpha\to\infty}\pi_\alpha = b$.

§5.4

1. 证明表 5.1 中被标注了 "+" 的那些性质.

2. 对表 5.1 第 2 列前 4 行的被标注了 "−" 的那些性质构造反例.

3. 研究 Esscher 保费原理的如下混合类型的可加性：$\pi[X] = p\pi[X;h_1] + (1-p)\pi[X;h_2]$, 其中 $p \in [0,1]$, $\pi[X;h]$ 是风险 X 的带有参数 h 的 Esscher 保费.

4. 试对相依的风险 X 和 Y 给出一个条件使得方差保费满足 *次可加性*: $\pi[X+Y] \leqslant \pi[X] + \pi[Y]$. 并证明：无论 X 和 Y 的联合分布如何，标准差保费原理都满足次可加性.

§5.5

1. 为给出 $n = 2$ 时 Hölder 不等式的一个证明，设 $p, q > 1$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 依次证明

- 如果 $u > 0$ 和 $v > 0$, 则 $uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$ (记 $u = e^{s/p}$ 及 $v = e^{t/q}$);
- 如果 $E[U^p] = E[V^q] = 1$ 且 $\Pr[U>0] = \Pr[V>0] = 1$, 则 $E[UV] \leqslant 1$;
- $|E[XY]| \leqslant E[|X|^p]^{1/p} E[|Y|^q]^{1/q}$.

2. 在上一题中令 $p = q = 2$ 可以导出什么不等式？



第6章　奖惩系统

§6.1　引　言

本章研究关于汽车保险中奖惩方法的理论. 汽车保险是非寿险的一个重要分支, 在许多国家汽车险甚至在总保费收入中占的比例最大. 汽车险的一个显著特点是保费的收取常常极大地依赖于该保单过去的理赔记录, 这样的保费收取方式令各方都满意. 在这样一个经验费率系统中, 投保人会由于没有理赔记录而获得奖励, 会由于有过多次理赔记录而受到惩罚. 经验费率系统在再保险中是常见的, 而在这里它直接影响到消费者. 实际上, 通过征收具有随机波动特性的保费, 保险的"处于完全安全的财务状况下"这个最终目的并没有达到. 不过在这类保险中不确定性极大地降低了. 类似现象在其它险种中也可见到, 例如考虑带有免赔额的保险, 其中的部分损失额不必由保险公司赔偿.

保险的本质在于"幸运的"保单持有人为"不幸运的"保单持有人买单 (*概率意义上的利益共同体*). 但是在私营保险中, 利益共同体不应该导致"好的"被保险人固有地要为另一个"差的"被保险人买单这样一个局面. 若保险人试图将这种 *补贴利益共同体* 强加于客户, 他将会看到"好的"被保险人纷纷离他而去, 而留下来的只是一些"差的"被保险人了. 上述现象有可能发生在含有区域性经营的保险人的汽车保险市场. 在全国范围内收取同样的保费就会导致区域性风险, 试想一下, 对处于交通不怎么繁忙地区的驾驶员来说他们的风险相应会小一些, 于是他们自然地想到去选择一些保费较低的区域性保险公司.

至于为什么经验费率系统能够在汽车保险中被广泛接受而在健康保险上不是这样, 这里有一个心理上的原因. 经验费率系统中的奖励被视为对细心的驾驶员的一种奖赏, 而对于事故频发的驾驶员来说, 增加的保费被视为对他追加的罪有应得的罚款. 许多人认为对交通肇事者处罚得再严厉和频繁都不为过. 然而一个人不应该因为生了病而受到指责或遭受罚金.

传统上, 汽车保险覆盖了第三方的责任以及自己车辆的损坏情况. 后者对新车驾驶员尤为重要, 这是因为保险公司出于对道德危害等的考虑所做的赔偿不超过汽车的现价.

§6.2 介绍荷兰奖惩系统, 我们认为该系统具有典型意义. 同时, 我们还将简要介绍一下引入该系统的理由. 在 §6.3 我们用马尔可夫链对奖惩系统进行分析. 用这种方法可以确定这些系统的 Loimaranta 功效, 即关于理赔频数的平均值渐近保

费的弹性. 在第 7 章我们给出一个奖惩系统来作为所谓的信度方法特例. 我们在第 8 章的一个任务是用广义线性模型来研究关于车险保费厘定的若干古老的非寿险精算方法.

§6.2 奖惩系统的一个例子

像车轮被多次重复发明一样, 每个国家均有自己的奖惩系统. 于 1982 年, 迫于保险市场的混乱和面临解体的危险, 荷兰当时最大的五家保险公司对荷兰市场进行了大规模的研究, 推出了荷兰奖惩系统. 许多荷兰保险公司至今仍然在使用基于那时提出的系统的变种.

首先要利用一些评估因子来确定一个基本保费, 这些评估因子包括汽车的重量、价格、载重、汽车类型 (私家车还是公司车) 等等, 当然还包括承保的范围, 如综合险、第三方责任险或混合险等. 该基本保费是驾驶员在没有已知理赔记录时须缴纳的保费. 通过使用所谓的奖惩标准, 对 "好的" 和 "差的" 的理赔记录分别执行奖励和惩罚. 经过一个无理赔年度, 被保险人上升一个台阶, 获得较大的奖励; 而如果有一个或多个理赔记录, 那么被保险人就要下降一个或几个台阶. 我们在表 6.1 描述了一个奖惩标准, 该标准给出了要付的基本保费的百分比以及经过 0,1,2,3 个或更多个理赔以后的转移. 原则上新来的被保险人应进入保费水平为 100% 的台

表 6.1 荷兰奖惩系统中转移规则和保费百分比

水平	百分比	理赔后新的奖惩水平			
		0	1	2	3+
14	30	14	9	5	1
13	32.5	14	8	4	1
12	35	13	8	4	1
11	37.5	12	7	3	1
10	40	11	7	3	1
9	45	10	6	2	1
8	50	9	5	1	1
7	55	8	4	1	1
6	60	7	3	1	1
5	70	6	2	1	1
4	80	5	1	1	1
3	90	4	1	1	1
2	100	3	1	1	1
1	120	2	1	1	1

阶. 其它国家可能会使用不同的评估因子和不同的奖惩标准. 倡导新费率系统的一个荷兰精算组研究大约 700 000 个保单，每个保单具有 50 个特征数据，这些保单总共有 80 000 个理赔. 该精算组还研究了理赔频数和平均理赔额.

那些被认为与保单有关的因素并非都能用来作为厘定费率的因子，如驾驶能力、反应速度、驾车闯劲以及对交通信号的了解程度等都是难以测量的，而行车里程却容易被故意做假. 对其中有些因素我们可以找到一些替代措施. 例如，可以通过观察汽车的重量、车龄，以及使用的燃料类型，或用途 (私用或者公用) 等来很好地了解车的行驶里程. 再比如，只有那些计划行车里程很长的驾驶员才选择使用柴油发动机. 由居住区域可以推算出交通密度，由马力和汽车重量可以推算出驾驶速度等. 但是完全利用事先已知的数据仍然不可能估算出未来平均理赔行为，于是有必要把实际理赔历史作为一个评估因子. 理赔记录属于一个事后因子，即它只有在下一个承保年之前才完全已知，所以有人称此为事后保费评估. 但一般来讲保费都是事先给定的.

在研究中我们发现如下现象. 汽缸容量和汽车马力几乎提供不了多少额外的预测功效，这与汽车重量不同. 汽车保险实践证明汽车重量与总理赔额 (即理赔频数与平均理赔额的乘积) 关系密切. 车越重使用得就越频繁，并且在事故时造成损坏也就更大. 汽车重量的信息可以在一些关于汽车的正式资料中查到，所以是一个使用方便的评估因子. 在许多国家，汽车的原始价目表被作为保险第三方损坏时的主要评估因子. 不过这个方法有其缺陷，按此方法，驾驶员给汽车上了金属抛光漆，或者安装了更加贵重的音频系统会导致较高的第三方理赔，这种推理显然是不合理的. 实践证明，除了汽车重量，价目表也无助于改进对于第三方理赔的预测，当然对于自己车辆的损坏来说价目表不失为一个主要的评估因子. 注意到被提议的保费不可能正好是汽车重量和价目表的函数，不过它直接与这些数目成比例.

要素 “过去理赔经历” 通常以 “无理赔年数” 来体现，在预测未来理赔时，即使与其它评估因子一起使用，该要素也不失为一个好的预测量. 经过六个无理赔年份后风险仍然在逐渐减少，不过减少的速度变缓慢了. 这可以由表 6.1 给出的奖惩标准中的百分比体现出来. 此外，有不良理赔记录的驾驶员会比新手更加糟糕，这也证明了存在超过 100% 保费百分比的惩罚等级是合理的.

通过对区域在理赔记录上的影响进行分析表明，在人口密度低的地方发生的理赔会少一些，但同时理赔额会稍微大一些. 区域的影响并不随着无理赔年数的增加而消失. 因此，该影响以一个固定的折扣具体表现出来，这使得大的保险公司可以与区域经营的小公司进行公平竞争.

保单持有者的年龄对其理赔行为的影响很重要. 一个 18 岁的驾驶员的理赔频数大约是一个 30~70 岁驾驶员的理赔频数的 4 倍. 导致这种差理赔记录的部分原因是缺乏经验，不过几年以后这种影响就逐渐消失了. 因此，保险人决定不要基本

保费随着年龄而改变，而仅仅是把年轻驾驶员列到奖惩系统中一个更为不利的水平之上.

虽然保单持有人的职业以及汽车的品牌等因素都有着不容忽视的影响，但是出于一些商业的原因，它们并没有在保费评估系统中得以表现出来.

对于奖惩系统中的转移来说，我们只考虑了记录在案的理赔次数，而没有顾及理赔额的大小. 很显然，我们可能构造出一个基于理赔额大小的奖惩系统，不过在汽车保险中迄今几乎还没人用过这样的系统.

§ 6.3 马尔可夫分析

奖惩系统是马尔可夫过程的特殊情形. 在马尔可夫过程中，随着时间的改变一个状态会转移到另一个状态. 马尔可夫性是指过程具有如下的无记忆性：过程到达一个特定的状态后再往下一个状态转移的概率不依赖于过程如何到达当前状态的. 利用马尔可夫分析，我们可以求出驾驶员最终处于奖惩系统各台阶上的概率. 同时，马尔可夫分析还可以帮助我们判断在确定代表驾驶员实际风险的调整保费时奖惩系统的效果如何.

为了更明白起见，我们先来看一个简单的例子. 设在一个特定的奖惩系统中有一位驾驶员，如果他在前两年中的任何一年有理赔记录，那么他需要缴纳一个较高的保费 c; 否则，他只需要缴纳保费 a, $a < c$. 为了用一个奖惩标准来描述该系统，我们要注意的是需要缴纳高保费的有两组驾驶员，一组的理赔发生在去年，另外一组的理赔发生在前年. 因此这里有三个状态：

1. 理赔发生在去年，所以在上一次保单续保时支付保费 c;
2. 去年没有理赔而前年发生了理赔，支付保费 c;
3. 去年和前年都没有理赔，支付保费 a.

设一个驾驶员在一个保单年度里发生一个或多个理赔的概率为 p, 首先我们来求其转移概率. 如果给定前两年中有一个理赔发生，那么该驾驶员会跌到状态 1, 或状态要上升一个水平. 于是我们得到下面的具有转移概率 p_{ij} (由状态 i 到状态 j 的概率) 的转移矩阵 P:

$$P = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ p & 0 & q \\ p & 0 & q \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

P 是一个随机矩阵：每行表示一个进入各状态的概率分布，从而所有元素都是非负的. 同时，所有的行和 $\sum_j p_{ij}$ 都等于 1, 这是由于从任何一个状态 i 开始，过程

必须进入某个状态 j. 显然

$$P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

故矩阵 P 对应于特征值 1 的一个右特征向量为 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 记 f_j 为每个驾驶员在初始时刻 $t=0$ 处在状态 $j=1,2,3$ 的概率，满足 $f_j \geqslant 0$ 且 $f_1+f_2+f_3=1$, 再记行向量 $l(0)=(f_1,f_2,f_3)$. 通常情况下初始状态 i 是已知的，从而 f_i 等于 1. 时刻 0 处于状态 i 且一年后状态从 i 转换到 j 的概率等于 $f_i p_{ij}$. 由此可见，从一个初始状态集合 (初始状态为 i 的概率为 f_i) 出发一年后处于状态 j 的总概率等于 $\sum_i f_i p_{ij}$. 利用矩阵记号，下面的向量 $l(1)$ 给出了驾驶员一年后所处状态的概率分布:

$$l(1)=l(0)P=(f_1,f_2,f_3)\begin{pmatrix}p&q&0\\p&0&q\\p&0&q\end{pmatrix}=(p,qf_1,q(f_2+f_3)). \tag{6.3}$$

驾驶员在发生一个理赔时就跌入状态 1, 其进入该状态的概率为 $p=p(f_1+f_2+f_3)$. 当没有理赔发生时，驾驶员可能会进入高一级状态. 由于

$$l(2)=l(1)P=(p,qf_1,q(f_2+f_3))\begin{pmatrix}p&q&0\\p&0&q\\p&0&q\end{pmatrix}=(p,pq,q^2), \tag{6.4}$$

两年后所处状态的概率分布 $l(2)$ 应该与 $l(0)$ 独立. 换言之，两年后的状态不依赖于当前状态，而只是依赖于在这随后的两年里的理赔记录. 类推下去，可见 $l(3)=l(4)=l(5)=\cdots=l(2)$. 因此 $l(\infty):=\lim_{t\to\infty}l(t)=l(2)$. 向量 $l(\infty)$ 被称为稳态分布. 一般来说收敛性不会像本例这样如此迅速和彻底. 不过对一个矩阵求平方的运算会非常快，并且对 P 做 10 次这样的运算之后就已经得到了 P^{1024}. 这个矩阵的每个元素 r_{ij} 可以被解释为由初始状态 i 出发在 1024 年以后进入状态 j 的概率. 对于规范的奖惩系统来说，这样一个概率既不会太多地依赖于初始状态 i, 也不会与从状态 i 出发经过无穷年后到达状态 j 的概率相差太大. 因此 P^{1024} 所有的行实际上将等于一个稳态分布. 但是我们还有如下一个更正式的方法来求这个分布. 首先，注意到

$$\lim_{t\to\infty}l(t+1)=\lim_{t\to\infty}l(t)P,\quad 从而\quad l(\infty)=l(\infty)P. \tag{6.5}$$

这说明稳态分布 $l(\infty)$ 是 P 对应于特征值 1 的左特征向量. 为求 $l(\infty)$, 我们只需求出线性方程组 (6.5) 的一个非平凡解即可，该方程组等价于一个齐次方程组 $(P^{\mathrm{T}}-I)l^{\mathrm{T}}(\infty)=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$. 为了使得 $l(\infty)$ 为一个概率分布，我们需把它除上其各个分量之和以标准化. 鉴于 $l_j(\infty)=\lim_{t\to\infty}l_j(t)$, 向量 $l(\infty)$ 的所有分量必须是非负的.

注 6.3.1(状态的初始分布)　没有必要将 $l(0)$ 取为一个概率分布. 例如, 取之为 $l(0)=(1000,0,0)$ 也是有意义的. 以这种方式我们可以考察处在初始状态 1 的 1000 个驾驶员. 与 $l(0)$ 有所不同, 向量 $l(1), l(2), \cdots$ 以及 $l(\infty)$ 并不表示处在一个特定状态下驾驶员的精确数目, 而仅仅表示这些数目的平均值. 实际数目是服从二项分布的随机变量, 此处二项分布对应的概率模型中成功的概率为在给定时间处于特定状态的概率.

功效

奖惩系统的最终目的是使得每个人缴纳的保费尽可能地接近于其年理赔额的平均值. 为了研究一个奖惩系统是否能有效地实现这个目的, 我们必须来看看保费是如何依赖于理赔频率 λ 的. 为此, 假定随机的理赔频率可以用一个泊松过程来描述 (见第 4 章). 因此, 每年的理赔次数服从 Poisson(λ) 分布, 并且每年有一个或多个理赔发生的概率为 $p=1-e^{-\lambda}$. 我们称要缴纳的渐近保费的平均值为稳态保费. 该稳态保费当然依赖于 λ, 在上面的例子中, $l(\infty)=(p,pq,q^2)$ 且保费等于 (c,c,a), 于是稳态保费为

$$b(\lambda)=c(p+pq)+aq^2=c(1-e^{-2\lambda})+ae^{-2\lambda}. \tag{6.6}$$

这就是在初始状态影响已经消失以后要缴纳的平均保费. 原则上, 这个保费应该与 λ 成比例, 这是因为理赔频数强度为 λ 的驾驶员的平均年理赔总额等于单个平均理赔额的 λ 倍, 并且我们已经假设了单个理赔额与理赔频数独立. 定义关于奖惩系统的如下函数:

$$e(\lambda):=\frac{\lambda}{b(\lambda)}\frac{db(\lambda)}{d\lambda}=\frac{d\log b(\lambda)}{d\log\lambda}, \tag{6.7}$$

并称之为 Loimaranta 功效;　上面最后一个等式可以由链式法则来证明.　$e(\lambda)$ 表示稳态保费 $b(\lambda)$ 关于 λ 的弹性. 对于充分小的 h, 可以证明: 如果 λ 以 $1+h$ 倍速度增加, 那么 $b(\lambda)$ 将近似以 $1+e(\lambda)h$ 倍速度增加, 所以

$$b(\lambda(1+h))\approx b(\lambda)(1+e(\lambda)h). \tag{6.8}$$

理想的情况是功效应当满足 $e(\lambda)\approx 1$. 对于上面的具有三个状态的特例来说, 由 $b(\lambda)$ 的清晰表达式 (6.6) 可知其功效等于

$$e(\lambda)=\frac{2\lambda e^{-2\lambda}(c-a)}{c(1-e^{-2\lambda})+ae^{-2\lambda}}. \tag{6.9}$$

由于稳态保费并不依赖于初始状态, 所以其 Loimaranta 功效也不依赖于初始状态, 尽管两者均依赖于理赔频数 λ.

注 6.3.2(功效小于 1 意味着差驾驶员占便宜)　在各种系统中保费百分比均为正的有限数, 即 $b(0)>0$ 且 $b(\infty)<\infty$. 在许多实际的奖惩系统中, 对于所有的 λ 有 $0<e(\lambda)<1$. 例如, 当 $a<c$ 时公式 (6.9) 对应的情形便是如此 (见习题 §6.3 第 4 题). 于是,

$$\frac{d}{d\lambda}\log\frac{b(\lambda)}{\lambda}=\frac{b'(\lambda)}{b(\lambda)}-\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}(e(\lambda)-1)<0. \tag{6.10}$$

所以 $\log\frac{b(\lambda)}{\lambda}$ 关于 λ 单调下降，此外，当 $\lambda\downarrow 0$ 时 $\frac{b(\lambda)}{\lambda}$ 会趋于 ∞，当 $\lambda\to\infty$ 时 $\frac{b(\lambda)}{\lambda}$ 会趋于 0. 所以存在一个理赔频率 λ_0 使得 $\lambda=\lambda_0$ 时的稳态保费正好等于纯保费.

对应于 $\lambda>\lambda_0$ 的驾驶员缴纳的保费比他们应缴的要少，而对应于 $\lambda<\lambda_0$ 的驾驶员缴纳的保费比他们应缴的要多. 这意味着从好的驾驶员到差的驾驶员之间有一个资金转移. 该奖惩系统的规则对差的驾驶员惩罚得不够 (见习题 §6.3 第 4 题).

注 6.3.3(奖金饥渴症)　设一个具有理赔概率 p 的驾驶员处在上述系统中的状态 3，一次事故给他造成的损失额为 t. 如果他不是必须要将此事故损失报告给保险公司，那么什么情况下报告给保险公司对自己有利？

正如有些保单所允许的那样，假定他只需要在 12 月 31 日来决定是否要向保险公司索赔，从而使得此次事故让保险公司记录在案，此处假定在该保单年内除此事故外无其它事故发生. 由于 2 年以后该特定的理赔对他在奖惩系统中位置的影响就会消失，我们现在以 2 年为期限. 他在接下来的 2 年里的花费 (保费加上损失) 依赖于他是否向公司索赔以及来年是否有理赔发生，如下所示：

	下年无理赔	下年有理赔
不索赔	$a+a+t$	$a+c+t$
索赔	$c+c$	$c+c$

如果索赔能够减少他的平均损失，他当然要向公司索赔，所以考虑

$$(1-p)(2a+t)+p(a+c+t)\geqslant 2c\quad\Leftrightarrow\quad t\geqslant(2-p)(c-a). \tag{6.11}$$

由 (6.11) 可见当事故损失很小时向公司索赔是不明智的，这将导致未来得到的奖金减少. 这种在实际中并非不重要的现象称之为*奖金饥渴症*. 另一方面，保险公司也没有得到应得的保费，因为该被保险人实际上隐瞒了自己是一个差驾驶员的事实. 不过鉴于对小额理赔处理起来需要一定的操作费用，被保险人是否为了小额损失向公司索赔对保险公司来说也就无所谓了.

有许多文献从精算学和随机运筹学的角度对该现象进行了研究. 在这些文献中使用的模型非常精细，例如使用更长的时间或者无穷时间，并带有折限等. 此外，理赔时间也成为了一个重要因素.

注 6.3.4(稳态保费和 Loimaranta 功效)　为求某个奖惩系统的稳态保费以及 Loimaranta 功效，我们按照如下步骤进行. 设 n 表示状态的个数. 为简化记号，我们引入函数 $t_{ij}(k)$, $i,j=1,2,\cdots,n$, 来表示转移规则：

$$t_{ij}(k)=\begin{cases}1, & \text{如果一年中有 } k \text{ 个理赔，则从状态 } i \text{ 转到状态 } j;\\ 0, & \text{其它.}\end{cases} \tag{6.12}$$

从状态 i 到状态 j 的转移概率 (参数等于 λ) 为

$$P_{ij}(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(\lambda)t_{ij}(k). \tag{6.13}$$

下面考虑初始分布 $l(0)=(l_1(0),\cdots,l_n(0))$, 这里 $l_j(0)$ 表示在时刻 $t=0$ 发现一个保单处在状态 j 的概率， $j=1,2,\cdots,n$. 那么在时刻 $t+1$ 发现一个保单处在不同状态的概率向量可以表示为

$$l_j(t+1)=\sum_{i=1}^{n}l_i(t)P_{ij}(\lambda), \quad t=0,1,2,\cdots. \tag{6.14}$$

对于每个 t 有 $l_j(t)$ 之和为 1. 在稳定状态下，取极限 $t\to\infty$ 得

$$l_j(\infty)=\sum_{i=1}^{n}l_i(\infty)P_{ij}(\lambda), \quad \text{其中} \quad \sum_{j=1}^{n}l_j(\infty)=1. \tag{6.15}$$

如前所述，稳态分布向量 $l(\infty)=(l_1(\infty),\cdots,l_n(\infty))$ 是矩阵 P 对应于特征值 1 的左特征向量. 在稳态下，我们可以得到理赔频数为 λ 的渐近平均保费 (即稳态保费):

$$b(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}l_j(\infty)b_j, \tag{6.16}$$

其中 b_j 是状态 j 的保费. 注意到 $l_j(\infty)$ 依赖于 λ, 但不依赖于状态的初始分布.

若利用一个程序计算出 (6.16) 中的 $b(\lambda)$, 我们就很容易求出 Loimaranta 功效 $e(\lambda)$ 的近似值. 我们所要做的就是应用 (6.8). 不过也有可能精确地计算出功效 $e(\lambda)$. 记 $l_j(\lambda)=l_j(\infty)$, 则

$$\frac{db(\lambda)}{d\lambda}=\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{dl_j(\lambda)}{d\lambda}=\sum_{j=1}^{n}b_jg_j(\lambda),. \tag{6.17}$$

其中 $g_j(\lambda)=\frac{dl_j(\lambda)}{d\lambda}$. 这些导函数可以通过对方程组 (6.15) 两边同时求导来得到. 易见下列方程成立:

$$g_j(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}g_i(\lambda)P_{ij}(\lambda)+\sum_{i=1}^{n}l_i(\lambda)P'_{ij}(\lambda), \tag{6.18}$$

其中 $P_{ij}(\lambda)$ 的导数等于

$$P'_{ij}(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}t_{ij}(k)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}[t_{ij}(k+1)-t_{ij}(k)]. \tag{6.19}$$

对于每个 λ, 利用 $\sum_j g_j(\lambda)=0$, 可以通过求解相应的线性方程组来得到功效 $e(\lambda)$. 于是，可以按照功效来比较各种不同的奖惩系统，例如可以比较当 λ 取 $[0.05, 0.2]$ 中某些值时对应的 $e(\lambda)$ 图形，或者可以观察 $e(\lambda)$ 的加权平均值等.

§6.4 习　题

§6.2

1. 设有一个荷兰驾驶员，起初以水平 100% 进入奖惩系统，前 7 个保单年没有理赔记录，在第 8 个保单年有一个理赔记录，在接下来的 3 年中又没有理赔记录. 试求该驾驶员需要缴纳的关于基本保费的百分比. 如果他的那个理赔发生在第二个保单年，他应缴纳的保费总和会不会不同?

§6.3

1. 证明 (6.8).

2. 对于 (6.1) 中的 P, 计算 P^2. 其元素有什么意义? 你能够据此直接看出 $l(2)=l(\infty)$ 成立吗?

3. 考察本节那个具有三个状态的例子. 如果在状态 2 上的保费是 a 而不是 c, 求 $e(\lambda)$. 讨论现在该系统可以只用两个状态来描述，并求 P 和 $l(\infty)$.

4. 证明：在 (6.9) 中，对于满足 $a<c$ 的每一个 a 和 c 有 $e(\lambda)<1$. 何时 $e(\lambda)$ 接近于 1?

5. 设利率为 i, 请在保单年末重新对一个理赔计算 (6.11).

6. [♠] 试利用 (6.17)~(6.19) 的方法来计算 Loimaranta 功效 (6.9).

7. 设转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix}\alpha & 1-\alpha\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix} \tag{6.20}$$

的稳定状态向量为 $(\frac{5}{12},\frac{7}{12})$. 试求 α 的值.

8. 如果对于在稳态保费，当 $\lambda=0.050$ 时有 $b(\lambda)=100$, 而当 $\lambda=0.051$ 时有 $b(\lambda)=101$, 试估计在 $\lambda=0.05$ 时的 Loimaranta 功效 $e(\lambda)=\frac{d\log b(\lambda)}{d\log\lambda}$.

9. 对于下列转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix}t & 1-t\\ s & 1-s\end{pmatrix}, \tag{6.21}$$

如果其稳态分布向量为 $(p, 1-p)$, 试确定 s 和 t 之间的关系.

第7章　信度理论

§7.1　引　言

在保险实务中，我们往往需要在下面的情况下对一组保险合同来确定一个保费，我们有关于该组本身的一些理赔记录，但是在与其或多或少相关的更大的一组保险合同上我们有更多的理赔记录. 于是问题就转化为如何建立一个经验费率系统来确定下一年的保费，使得不仅要考虑到该组个体理赔记录 还要考虑到集体理赔记录. 这里有两个可能的极端. 一个极端是对每一个成员收取同样的保费，该保费由数据的总平均数 $\overline{X}$ 来估计. 在齐次保单组合下这个保费是可行的，保单组合的齐次性意指所有的风险单元具有同样的平均理赔. 但是在非齐次保单组合下，那些具有 "好" 风险属性的成员就会到别的地方去投保，而留给保险人的只有那些具有 "坏" 风险属性的成员了. 另一个极端是对组 j 的成员收取的保费等于该组自己的平均理赔 $\overline{X}_j$. 在非齐次保单组合下这种保费是可行的，不过只有在每组的理赔记录足够多时我们才可以运用它们. 自 20 世纪初以来，人们就常常想到了一个折衷方案，即考虑这两个极端的加权平均：

$$z_j\overline{X}_j + (1 - z_j)\overline{X}. \tag{7.1}$$

系数 z_j 表示第 j 单元的个体理赔记录的可信程度，我们称之为 *信度因子*; 我们称由 (7.1) 这样制定的保费为一个 *信度保费*. 因为保单组合一般既不可能是齐次的，也不可能是非齐次的，基于集体和个体理赔记录来收取保费的办法被证明是可行的. 第 j 组的风险变量具有与其它组风险变量共同的一些属性，但是它们自身也具有一些特性.

在下面的情形下可以取 z_j 接近于 1：我们有大量的关于第 j 单元风险的观测数据，或单元风险的波动较小，再或组与组之间的波动较大. 有两种方法可以用来确定 z_j 的值. 在 *被限制浮动信度理论* 中，当一个单元有足够多的记录时，我们给定该单元一个完全信度 $z_j = 1$. 这意味着在个体均值中至少具有某个相对误差的概率不超过一个给定的门限. 如果不是这样的话，信度因子等于实际呈现的记录与完全信度所需的记录的比值. 更有趣的一个信度理论是 *最大精度信度理论*, 按照该理论信度因子被推导为具有方差分量的 Bayes 模型的一些最优系数. 该模型由 Bühlmann 于 1960 年左右引入.

注意到除了理赔额之外，数据也可以涉及一些 *损失比*, 如理赔额与保费的比,

或者理赔占承保总额的百分比等等. 一个单元的理赔记录常常只关系到一个合同, 该合同在许多时间段内被观察, 不过也有可能一个单元含有多个同样的合同.

在实际中, 我们只在拥有非常少的数据时才使用信度保费. 如果有一些以间接变量的形式出现的附加信息, 我们或许还可以使用在下一章要描述的广义线性模型 (GLM) 的办法. 但现在的主要问题是确定我们必须使用多少实际数据, 见注 7.2.7 和习题 §7.4 第 7 题.

在 §7.2 中, 我们将用一个基本的模型来阐明信度理论的一些思想. 在该模型中合同 j 于时间段 t 的理赔总额 X_{jt} 被分解成三个单独的分量. 第一个分量是总体均值 m, 第二个分量是特定的合同 j 的理赔额与总体均值的偏差, 第三个分量是在特定的时间段 t 内的理赔额与总体均值的偏差. 我们假设这些偏差是一些独立的随机变量, 于是在理赔额之间就存在一个协方差结构, 在该结构下以最小化某个平方和的方法我们可以推导出各分量的估计. §7.3 将说明这些协方差结构以及最优化估计量还可以出现在更一般的模型之中. 进一步我们要对这个基本模型的一些可能的推广给出一个简短的评论. 在 §7.4, 我们研究 Bühlmann-Straub 模型, 在该模型中观察值被用不同的精度来测量. 在 §7.5 中, 我们将给出来自于汽车保险领域的一个应用, 其中理赔次数是一些服从泊松分布的随机变量, 其结构参数假设服从一个伽玛分布.

§7.2 平衡 Bühlmann 模型

为了阐明关于信度理论的一些思想, 本节我们研究一个程式化的信度模型. 用随机变量 X_{jt} 来表示单元 j 在第 t 年的理赔统计量, 其中 $j = 1, 2, \cdots, J$. 为了简单起见, 设该单元只含有一个合同, 并且每个单元在 T 个时间段被观测. 所以对每一个 j, 角标 t 取值于 $t = 1, 2, \cdots, T$. 设这个理赔统计量是一个单元均值 m_j 与一个白噪声的和, 即所有的 X_{ij} 相互独立且服从 $N(m_j, s^2)$ 分布, 对应于每个单元的均值 m_j 可能不相等, 但是方差 $s^2 > 0$ 是相同的. 我们可以用大家熟知的 *方差分析* (ANOVA) 的统计技巧来检验所有组的均值是否相等. 如果原假设 "所有 m_j 相等" 不成立, 那么单元平均 $\overline{X}_j$ 与总体平均 $\overline{X}$ 之间的差异比预想的要大. 由此我们来看如下称之为 *组间平方和* (记为 SSB) 的这个随机变量:

$$\mathrm{SSB} = \sum_{j=1}^{J} T(\overline{X}_j - \overline{X})^2. \tag{7.2}$$

可以证明, 在原假设 "所有均值 m_j 相等" 下, 随机变量 SSB 具有均值 $(J-1)s^2$. 由于 s^2 未知, 我们必须另外估计该参数. 该估计可以有下面的称之为 *组内平方和*(记

为 SSW) 来推导:

$$\mathrm{SSW} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T} (X_{jt} - \overline{X}_j)^2. \tag{7.3}$$

易见随机变量 SSW 具有均值 $J(T-1)s^2$. 对 SSB 除以 $J-1$ 且对 SSW 除以 $J(T-1)$ 可得到另外的两个随机变量, 分别称之为 *组间均方和*(MSB) 和 *组内均方和*(MSW), 每个的均值都是 s^2. 我们现在可以执行一个 F- 检验, 对比 MSW 来说 MSB 取大值预示着原假设 "所有组的均值相等" 必须被拒绝. 检验统计量是所谓的 *方差比*(或称 F- 比):

$$F = \frac{\mathrm{MSB}}{\mathrm{MSW}} = \frac{\frac{1}{J-1} \sum_j T(\overline{X}_j - \overline{X})^2}{\frac{1}{J(T-1)} \sum_j \sum_t (X_{jt} - \overline{X}_j)^2}. \tag{7.4}$$

在原假设之下, SSB 除以 s^2 之后服从 χ^2_{J-1} 分布, 而 SSW 除以 s^2 后服从 $\chi^2_{J(T-1)}$ 分布. 进一步, 我们还可能证明这些随机变量是相互独立的. 所以比值 F 服从 $F_{J-1,J(T-1)}$ 分布. 这些陈述的证明可以在许多数理统计教科书中标题为 "单因素方差分析" 里面找到. F 的临界值可以在 F- 表 (Fisher 分布) 里面查到.

例 7.2.1 (一个非齐次保单组合) 设我们有如下的对 3 个组 5 年的观测数据:

	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$	$\overline{X}_j$
$j=1$	99.3	93.7	103.9	92.5	110.6	100.0
$j=2$	112.5	108.3	118.0	99.4	111.8	110.0
$j=3$	129.2	140.9	108.3	105.0	116.6	120.0

读者可以验证, MSB 等于 500, 自由度为 2, 而 MSW 等于 109, 自由度为 12. 于是 $F=4.6$, 这与水平为 95% 的临界值 3.89 比较起来数值过大了. 我们的结论是这些数据表明每组的平均理赔不全相等. ▽

如果原假设没有被拒绝, 那么就没有明显令人信服的统计证据表明该保单组合是非齐次的. 因而, 我们必须对每一个合同索取同样的保费. 在原假设被拒绝的情况下, 单元的均值 m_j 之间存在显著差异. 此时, 我们可以视这些数字 m_j 为一些固定的未知数, 然后再设法找到它们满足的方程组, 例如可以采用对一些间接数据作回归的办法. 另一个方法是假设这些数字 m_j 是由一个随机机制生成了, 例如这个随机机制为一个白噪声 (类似于前面刻画组内理赔量与组内均值之间差异的那个白噪声). 这表明我们可以把理赔统计量作如下分解:

$$X_{jt} = m + \Xi_j + \Xi_{jt}, \quad j=1,\cdots,J, \quad t=1,\cdots,T, \tag{7.5}$$

其中 Ξ_j 和 Ξ_{jt} 是两个独立的随机变量, 满足

$$E[\Xi_j] = E[\Xi_{jt}] = 0, \quad \mathrm{Var}[\Xi_j] = a, \quad \mathrm{Var}[\Xi_{jt}] = s^2. \tag{7.6}$$

因为 (7.5) 中 X_{jt} 的方差等于其分量的方差之和，我们称形如 (7.5) 这样的模型为*方差分量模型*. 模型 (7.5) 是所谓的经典 Bühlmann 模型 的一个简化形式，这是由于我们在此假设了分量之间的独立性，而 Bühlmann 仅假设它们的相关系数等于 0. 我们称此处的模型为*平衡 Bühlmann 模型*, 在该模型中所有的观测的方差相等，所有单元的保单数目相等.

模型 (7.5) 中每个分量的解释如下：

1. m 是总平均，它等于该保单组合中任何一个保单持有人的理赔额的期望值.

2. Ξ_j 表示第 j 个合同的理赔与第 j 个合同理赔均值之间的随机偏差. 给定 $\Xi_j = \xi$, 随机变量 X_{jt} 的条件期望等于 $m+\xi$. 它表示的是当观测时间长度 T 趋于无穷时逐年理赔的长期平均值. 分量 Ξ_j 刻画了这个特定合同的风险属性；均值 $E[\Xi_j]$ 等于 0, 它的波动刻画了合同之间的差别. Ξ_j 的分布称之为*结构分布*, 描述的是保单组合的风险结构. m, a 和 s^2 称之为*结构参数*.

3. 分量 Ξ_{jt} 表示第 t 年理赔偏离长期平均值的大小. 它们刻画了一个合同的内部变动情况，是保单持有人在好运气和坏运气之间理赔记录的变异情况.

注意到在上述模型中，对固定的 j, 随机变量 X_{jt} 是*相依的*, 这是由于它们共享了一个风险属性分量 Ξ_j.

在接下来的定理中, 我们要为尚未被观测的随机变量 $X_{j,T+1}$ 寻找一个预报量. 我们要求该预报量是那些可以观测的 $X_{11},\cdots,X_{JT}$ 的一个线性组合，且与 $X_{j,T+1}$ 均值相同. 此外，其均方误差必须是最小的. 在模型 (7.5) 下，我们证明该预报量具有信度形式 (7.1), 所以它是个体理赔记录与总平均理赔的一个加权和. 该定理还为我们提供了信度因子 z_j 的最优值. 我们想知道在下一时间段 $T+1$ 必须赔付的理赔额的最优预报量，因为它是我们必须向这个合同索取的保费. 关于分布的那些假设对所有时间段 $t=1,\cdots,T+1$ 都成立. 在下面的定理中我们没有用到正态假设.

定理 7.2.2(平衡 Bühlmann 模型；齐次估计量)　设合同 j 在时间段 t 的理赔额 X_{jt} 可以表示为如下的独立随机分量之和：

$$X_{jt} = m + \Xi_j + \Xi_{jt}, \quad j=1,\cdots,J, \quad t=1.\cdots,T+1, \tag{7.7}$$

其中随机变量列 Ξ_j 是 iid 的，$E[\Xi_j]=0$, $\mathrm{Var}[\Xi_j]=a$, 同时对所有的 j 和 t, 随机变量列 Ξ_{jt} 也是 iid 的，且 $E[\Xi_{jt}]=0$, $\mathrm{Var}[\Xi_{jt}]=s^2$. 进一步假设随机变量列 Ξ_j 与 Ξ_{jt} 相互独立.

于是, 在所有的齐次线性组合 $g_{11}X_{11}+\cdots+g_{JT}X_{JT}$ 中, 使得在均方误差 (MSE) 意义下，即最小化

$$E[\{X_{j,T+1} - g_{11}X_{11} - \cdots - g_{JT}X_{JT}\}^2], \tag{7.8}$$

$X_{j,T+1}$ 的最佳无偏预报量等于信度保费

$$z\overline{X}_j + (1-z)\overline{X}, \tag{7.9}$$

其中

$$z = \frac{aT}{aT+s^2} \tag{7.10}$$

是最优信度因子 (在当前条件下对所有的 j 相等),

$$\overline{X} = \frac{1}{JT}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T} X_{jt} \tag{7.11}$$

是 m 的整体估计，且

$$\overline{X}_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_{jt} \tag{7.12}$$

是 m 的组内估计量.

证明 由独立同分布的假设，当 $i \neq j$ 时随机变量 X_{it} 和 X_{jt} 是可互换的. 由凸性，(7.8) 有唯一的最小值. 由于对称性，在最优的时候所有的 g_{it} $(i \neq j)$ 必须相同. 我们可以对 $g_{jt}, t=1,\cdots,T$, 作同样的讨论. 由此以及无偏性的限制，可见具有最小均方误差的齐次线性估计量必须对某个 z 具有 (7.9) 的形式. 我们只需找到它的最优值.

由于 X_{jt}, $\overline{X}_j$ 和 $\overline{X}$ 都具有均值 m, 我们可以改写均方误差 (7.8) 如下:

$$\begin{aligned}
&E[\{X_{j,T+1} - (1-z)\overline{X} - z\overline{X}_j\}^2] \\
&= E[\{X_{j,T+1} - \overline{X} - z(\overline{X}_j - \overline{X})\}^2] \\
&= E[\{X_{j,T+1} - \overline{X}\}^2] - 2zE[\{X_{j,T+1} - \overline{X}\}\{\overline{X}_j - \overline{X}\}] + z^2E[\{\overline{X}_j - \overline{X}\}^2] \\
&= \mathrm{Var}[X_{j,T+1} - \overline{X}] - 2z\mathrm{Cov}[X_{j,T+1} - \overline{X}, \overline{X}_j - \overline{X}] + z^2\mathrm{Var}[\overline{X}_j - \overline{X}].
\end{aligned} \tag{7.13}$$

这个关于 z 的二次多项式当 z 取如下值时达最小:

$$z = \frac{\mathrm{Cov}[X_{j,T+1} - \overline{X}, \overline{X}_j - \overline{X}]}{\mathrm{Var}[\overline{X}_j - \overline{X}]} = \frac{aT}{aT+s^2}. \tag{7.14}$$

上面最后一个等号可以通过检验或补充如下一些必要的协方差的形式来证明 (我们把证明留给读者来完成):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}[X_{jt}, X_{ju}] = a, \ t \neq u; \\
&\mathrm{Var}[X_{jt}] = a + s^2; \\
&\mathrm{Cov}[X_{jt}, \overline{X}_j] = \mathrm{Var}[\overline{X}_j] = a + \frac{s^2}{T}; \\
&\mathrm{Cov}[\overline{X}_j, \overline{X}] = \mathrm{Var}[\overline{X}] = \frac{1}{J}\left(a + \frac{s^2}{T}\right).
\end{aligned} \tag{7.15}$$

所以当 z 由 (7.10) 给出时预报量 (7.9) 使得均方误差 (7.8) 达到最小. ▽

注 7.2.3(最优信度因子的渐近性)　(7.10) 中的信度因子 z 满足下面一些合理的渐近性质:

1. 如果 $T \to \infty$, 那么 $z \to 1$. 理赔记录越多, 我们对个体风险保费的把握就越大. 这个渐近情形并非与实际很吻合, 因为这里假设了风险属性不随着时间而变化.

2. 如果 $a \downarrow 0$, 那么 $z \downarrow 0$. 如果预期的个体理赔额同分布, 那么保单组合里面就没有非齐次现象. 于是总体均值 m (见下文 (7.16)) 或者由 (7.9) 给出的最优齐次估计 $\overline{X}$ 是风险保费的最优线性估计.

3. 如果 $a \to \infty$, 那么 $z \to 1$. 在直觉上这也是很清楚的. 在这种情况下, 关于其它合同的结果不提供任何关于第 j 个风险的信息.

4. 如果 $s^2 \to \infty$, 那么 $z \to 0$. 如果在一个固定的风险参数下理赔记录变化的幅度非常大, 那么个体记录对估计实际风险保费就没有太大的参考价值了. ▽

注意到只有在比值 s^2/a 已知时 (7.9) 才是一个统计量; 否则, 它的分布将含有未知参数. 作为方差分析的一个副产品, 对于这个比值, 在下面的例 7.2.5 中我们要给出一个估计方法. 之所以信度因子 (7.14) 不依赖于 j 是因为我们简单地假设了对每一个 j 观测次数是相同的, 以及所有的观测数据的方差也相同.

如果允许线性估计量含有一个常数项, 我们来考察最佳 *非齐次* 线性预报量 $g_0 + g_{11}X_{11} + \cdots + g_{JT}X_{JT}$, 于是得到了下面的定理. 必须注意以下两个问题: 第一, 下文将证明无偏性 的要求现在是多余的; 第二, 下面的 (7.16) 看起来很像 (7.9), 唯一的差别在于量 $\overline{X}$ 被换成了 m. 不过这意味着对第 j 组的非齐次信度保费不依赖来自于其它第 $i \neq j$ 组的数据. 在齐次信度保费中假设了比值 s^2/a 是已知的; 而在非齐次信度保费还额外假设了 m 已知.

定理 7.2.4(平衡 Bühlmann 模型; 非齐次估计量)　设 X_{jt} 分布与上一个定理中相同, 现用非齐次线性组合 $g_0 + g_{11}X_{11} + \cdots + g_{JT}X_{JT}$ 来预测下一年的总理赔 $X_{j,T+1}$. 则在均方误差意义下最优的预报是信度保费

$$z\overline{X}_j + (1-z)m, \tag{7.16}$$

其中 z 和 $\overline{X}_j$ 由 (7.10) 和 (7.12) 给出.

证明　类似于前一定理中分析, 由对称性可得在最优解中 g_{it} $(i \neq j)$ 的值是相同的, g_{jt} $(t = 1, \cdots, T)$ 的值也是相同的. 所以存在某个 g_0, g_1 和 g_2, 使得 $X_{j,T+1}$ 的具有最小均方误差的非齐次线性预报量具有如下形式:

$$g_0 + g_1\overline{X} + g_2\overline{X}_j. \tag{7.17}$$

这个均方误差可以改写成如下方差加上平方偏差之和:

$$
\begin{aligned}
&E[\{X_{j,T+1} - g_0 - g_1\overline{X} - g_2\overline{X}_j\}^2] \\
&= \mathrm{Var}[X_{j,T+1} - g_1\overline{X} - g_2\overline{X}_j] + \{E[X_{j,T+1} - g_0 - g_1\overline{X} - g_2\overline{X}_j]\}^2. \quad (7.18)
\end{aligned}
$$

当选择 $g_0 = m(1 - g_1 - g_2)$ 时, 上式右边第二项等于 0, 从而达到最小. 这证实了我们正在寻找的估计量必然是无偏的. (7.18) 右边的第一项可以被改写为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}[X_{j,T+1} - (g_2 + g_1/J)\overline{X}_j - g_1(\overline{X} - \overline{X}_j/J)] \\
&= \mathrm{Var}[X_{j,T+1} - (g_2 + g_1/J)\overline{X}_j] + \mathrm{Var}[g_1(\overline{X} - \overline{X}_j/J)] + 0, \quad (7.19)
\end{aligned}
$$

这里用到了协方差项等于 0 (因为 $g_1(\overline{X} - \overline{X}_j/J)$ 只依赖于 $X_{it}, i \neq j$). 可见任何一个满足 $g_1 \neq 0$ 的解 (g_1, g_2) 可以被改进, 这是因为 (7.19) 的下界在 $(0, g_2 + g_1/J)$ 达到. 从而选择 $g_1 = 0$ 应当是最优的. 所以现在剩下的问题就是如何来选择 g_2 使得下式最小化:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}[X_{j,T+1} - g_2\overline{X}_j] \\
&= \mathrm{Var}[X_{j,T+1}] - 2g_2\mathrm{Cov}[X_{j,T+1}, \overline{X}_j] + g_2^2\mathrm{Var}[\overline{X}_j], \quad (7.20)
\end{aligned}
$$

它有一个最优值

$$
g_2 = \frac{\mathrm{Cov}[X_{j,T+1}, \overline{X}_j]}{\mathrm{Var}[\overline{X}_j]} = \frac{aT}{aT + s^2}, \quad (7.21)
$$

亦即 (7.10) 给出的 z. 上面最后一个等式可以通过填补 (7.15) 中一些相应的协方差来验证. 这表明 $X_{j,T+1}$ 的预报量 (7.16) 有着最小的均方误差. ▽

例 7.2.5(例 7.2.1 中的信度估计) 再次考虑例 7.2.1 中的保单组合. 可以证明 (见习题 §7.2 第 8 题) 对于模型 (7.5), (7.4) 中 F 表达式的分子 MSB 的均值为 $aT + s^2$, 而分母 MSW 的均值为 s^2. 于是 $\frac{1}{F}$ 接近于 $s^2/\{aT + s^2\}$, 这意味着我们可以用 $1 - \frac{1}{F}$ 去估计 z. 注意到这不是一个无偏估计, 因为 $E[1/\mathrm{MSB}] \neq 1/E[\mathrm{MSB}]$. 对每一组, 最终的信度因子 $z = 0.782$. 所以对这三组明年的理赔额的最优预测公式 $0.782\overline{X}_j + (1 - 0.782)\overline{X}$, $j = 1, 2, 3$, 分别给出 102.18, 110 和 117.82. 请注意这里的 "收缩效应": 估计的信度保费比起原先的组平均 100, 110 和 120 来, 互相之间显得更接近了. ▽

注 7.2.6(估计风险保费) 可能有人会争辩, 我们在实际上必须做的是估计第 j 组的 风险保费 $m + \Xi_j$, 而不是预测下一年的包括波动 $\Xi_{j,T+1}$ 的理赔额 $X_{j,T+1}$. 但是要说明的是, 无论允许还是不允许在估计量里加入一个常数项, 我们得到的最优解和前面的都是一样的. 事实上, 对每一个随机变量 Y, 我们有

$$
\begin{aligned}
&E[\{m + \Xi_j + \Xi_{j,T+1} - Y\}^2] \\
&= E[\{m + \Xi_j - Y\}^2] + \mathrm{Var}[\Xi_{j,T+1}] + 2\mathrm{Cov}[m + \Xi_j - Y, \Xi_{j,T+1}]. \quad (7.22)
\end{aligned}
$$

如果 Y 只依赖于已经被观测到的数据 X_{jt}, 在 $t \leqslant T$ 下协方差项一定等于 0. 注意到由 (7.22), 分别作为 $m+\Xi_j$ 和 $X_{j,T+1}=m+\Xi_j+\Xi_{j,T+1}$ 的估计量 Y, 对应的均方误差 仅仅相差一个常数 $\mathrm{Var}[\Xi_{j,T+1}]=s^2$, 由此我们得到两个均方误差皆被同样的估计量 Y 最小化. ▽

信度保费 (7.16) 是被估计的个体平均理赔和这个保单组合平均理赔的一个加权平均, 其中前者的权重为信度因子 z. 由于我们假设了对每一个合同的观测年数 T 是相同的, 通过征收由 (7.16) 给出的最低水平的保费我们得到的保费收入与对每个人都征收统一的保费 $\overline{X}$ 相比应当是一样的. 在 $z=0$ 时个体保费等于集体保费. 在齐次保单组合中这个规则是可以被接受的, 但是在非齐次保单组合中这个规则一般不可以被接受. 在 $z=1$ 时, 保费的收取完全由个体记录来决定. 一般来说这个个体信息是非常贫乏的, 实际上无法使用这样一个估计. 有时用这个规则是完全失误的, 例如我们要对一个迄今未出现过任何理赔的合同来预报时.

量 $a>0$ 代表保单组合的非齐次程度, 如在风险品质分量 Ξ_j 中刻画的那样, 而 s^2 代表在齐次组之间波动程度的一个综合度量.

注 7.2.7(虚拟记录)　记 $X_{j\Sigma}=X_{j1}+\cdots+X_{jT}$, 于是信度保费 (7.16) 的一个等价表达式如下:

$$\frac{s^2m+aT\overline{X}_j}{s^2+aT}=\frac{ms^2/a+X_{j\Sigma}}{s^2/a+T}. \tag{7.23}$$

所以如果我们增加一个虚拟理赔额 ms^2/a 到实际被观测的理赔总额 $X_{j\Sigma}$ 之中, 再追加 s^2/a 次额外观测周期, 信度保费便成为被虚拟记录调整了的理赔额平均. ▽

§7.3　更一般的信度模型

在上节模型 (7.5) 中, 我们假设了分量 Ξ_j 和 Ξ_{jt} 是一些独立的随机变量. 但是从 (7.14) 和 (7.15) 可见实际上只有随机变量列 X_{jt} 的协方差起着实质性的作用. 当减弱加在模型上的一些条件时, 只要协方差结构保持相同, 我们就仍可以得到相同的结果. 例如, 我们只要求在给定条件 Ξ_j 后随机变量列 Ξ_{jt} 独立同分布, 且对所有的 ξ 满足 $E[\Xi_{jt}|\Xi_j=\xi]=0$. 可以证明, 如果 Ξ_j 和 Ξ_{jt} 的联合分布满足上面这些条件, Ξ_{jt} 未必是独立的, 但是它们不相关. 请见下面引理.

引理 7.3.1 (条件 iid 随机变量列是不相关的)　设给定 Ξ_j 后随机变量列 Ξ_{j1}, $\Xi_{j2},\cdots$ 是 iid 的且具有均值 0. 那么我们有

$$\mathrm{Cov}[\Xi_{jt},\Xi_{ju}]=0,\ t\neq u;\quad \mathrm{Cov}[\Xi_j,\Xi_{jt}]=0. \tag{7.24}$$

证明　由条件协方差的分解法则 (见习题 §7.3 第 1 题), 对 $t\neq u$ 我们有

$$\mathrm{Cov}[\Xi_{ju},\Xi_{jt}]=E[\mathrm{Cov}[\Xi_{ju},\Xi_{jt}|\Xi_j]]+\mathrm{Cov}[E[\Xi_{ju}|\Xi_j],E[\Xi_{jt}|\Xi_j]]. \tag{7.25}$$

由上面的假设我们有 $\mathrm{Cov}[\Xi_{ju}, \Xi_{jt}|\Xi_j] \equiv 0$ 和 $E[\Xi_{ju}|\Xi_j] \equiv 0$, 可见上式等于 0. 显然还有 $\mathrm{Cov}[\Xi_j, \Xi_{jt}|\Xi_j] \equiv 0$. 由于

$$\mathrm{Cov}[\Xi_j, \Xi_{jt}] = E[\mathrm{Cov}[\Xi_j, \Xi_{jt}|\Xi_j]] + \mathrm{Cov}[E[\Xi_j|\Xi_j], E[\Xi_{jt}|\Xi_j]], \tag{7.26}$$

随机变量 Ξ_j 和 Ξ_{jt} 也不相关. ∇

请注意, 在引理的模型中随机变量列 X_{jt} 并非边缘不相关的, 更不要说独立了.

例 7.3.2(混合泊松分布) 设随机变量 X_{jt} 代表一个特定的汽车保单在一年中的理赔次数. 驾驶员在该年的理赔次数服从一个 $\mathrm{Poisson}(\Lambda_j)$ 分布, 其中参数 Λ_j 具有某个非退化结构分布. 于是 (7.5) 的第一项代表任意一个驾驶员的期望理赔次数 $m = E[X_{jt}] = E[\Lambda_j]$. 第二项 $\Xi_j = \Lambda_j - m$ 代表该特定驾驶员与任意一个驾驶员的期望理赔次数之间的差额. 第三项 $\Xi_{jt} = X_{jt} - \Lambda_j$ 代表该特定驾驶员年理赔次数在其期望值附近波动幅度. 在这种情况下, 第二、三两项尽管不相关, 却是不独立的, 因为 $\mathrm{Var}[X_{jt} - \Lambda_j|\Lambda_j - m] = \mathrm{Var}[X_{jt}|\Lambda_j] = \Lambda_j$ (也可参阅 §7.5). ∇

注 7.3.3(通过一些风险参数来参数化) 方差分量模型 (7.5) 即使在放松了一些独立性假设后在实际应用中有时仍显过于苛刻. 设 (7.5) 中的 X_{jt} 现在表示例 7.3.2 中那个驾驶员全年的理赔总额, 再假设该变量服从一个复合泊松分布. 于是除了 Poisson 参数外, 现在还有关于理赔额分布的一些参数. 给定第二项 (年平均理赔总额) 后噪声项的条件方差现在不再是第二项的函数了. 为了弥补这个缺陷, Bühlmann 研究了一个稍微一般化的模型, 该模型中含有一个可能取向量值的隐变量 Θ_j 作为一个结构参数. 风险保费取为条件期望 $\mu(\Theta_j) := E[X_{jt}|\Theta_j]$, 而不是简单地取为 $m + \Xi_j$. 如果 $E[X_{jt}|\Theta_j]$ 不是 Θ_j 的一个一一对应的函数, 那么在上述基本模型中具有相同 Ξ_j 的那些合同, 在 Bühlmann 模型下, 它们的方差 $\mathrm{Var}[\Xi_{jt}|\Theta_j]$ 可能会有不同的表现形式, 因此在这里基本模型就不够用了. 不过可以证明在这种情况下协方差以及最优估计量是相同的.

不幸的是, Bühlmann 刻画风险结构的手法已被许多有关信度理论的教科书和论文所仿制. 一方面在一般性和机动性上的改进微乎其微, 另一方面作为结果的模型在技术上和概念上却要繁琐得多. ∇

我们可以把信度理论推广到比 (7.5) 更复杂的模型中, 并且可以在这些模型中建立起类似于定理 7.2.2 和定理 7.2.4 那样的结果. 本质上, 通过最小化二次均方误差以寻找在最小二乘意义下的一个最优预报量, 必要时附加一个额外无偏性限制. 由于在平衡 Bühlmann 模型中有对称性的假设, 那里只需处理一维最优化问题即可. 但是在一般情况下我们必须求解一个线性方程组, 该方程组是由对均方误差或者一个 Lagrange 函数 (当有一个无偏性局限时) 求导产生的. 我们不可以期待得到前面那样的解析解.

下面是基本模型的一些可能的推广.

例 7.3.4 (Bühlmann-Straub 模型; 变化的精度) 形如 (7.5) 的信度模型可以通过视 X_{jt} 为对一些保单的平均值而加以推广. 可以相信, 由于一些其它因素并非所有的 X_{jt} 被同样精确地测量了 (即具有相同的方差). 于是, 一个权宜之计是对模型引入一些权. 这样我们便得到了 Bühlmann-Straub 模型. 原则上说, 这些权应当代表着观测时段的总个数, 其中数字 X_{jt} 是均值 (自然权重). 有时这个数字是未知的. 这时我们不得不设法处理近似权的问题. 如果精算师认为恰当的话, 他可以对这些数字进行调整以反映出他对特定合同上的个体理赔观测数据的置信度. 在 §7.4 中, 我们要在 Bühlmann-Straub 模型下对齐次保费来证明一个类似于定理 7.2.2 的结果. ∇

例 7.3.5(Jewell 分层模型) 一个进一步的推广是把保单组合再分成一些小扇区, 并且假设每一个扇区 p 有着它自己到总平均的偏差. 扇区 p 中第 j 个合同在第 t 年的理赔记录可以作如下分解:

$$X_{pjt} = m + \Xi_p + \Xi_{pj} + \Xi_{pjt}. \tag{7.27}$$

该模型被称为 Jewell 分层模型. 把每个小扇区 p 再分成一些更小的子扇区 q, 每一个有着它自己的偏差 $\Xi_p + \Xi_{pq}$, 如此下去我们便得到了一个具有树状结构的分层模型链. ∇

例 7.3.6(交叉分类模型) 可以想像 X_{pjt} 是扇区 p 的风险, 角标 j 对应于另外某个可以分割保单的一般要素 (例如 p 代表区域, j 代表驾驶员的性别). 对这样的双向交叉分类, 使用分层模型意义不大. 取而代之的办法是在 (7.27) 中增加一项 Ξ'_j, 以刻画第 j 组的风险特征. 这样便得到

$$X_{pjt} = m + \Xi_p + \Xi'_j + \Xi_{pj} + \Xi_{pjt}. \tag{7.28}$$

这是一个交叉分类模型. 在第 8 章中, 我们要研究一些类似的模型, 在那里行和列效应是固定的, 但是未知的, 而不是像现在这样被模拟为一些随机变量. ∇

例 7.3.7(关于 IBNR 的 De Vijlder 信度模型) 在估计应该持有的 IBNR 储量时信度模型也是很有用的, 详见第 9 章. 这些 IBNR 储备被用来预防那些保险人不知道的 (或者不完全知道的) 理赔. 在某个年份 T, 理赔随机变量 X_{jt} 都变成已知的了, 这里的随机变量 X_{jt} 表示在第 j 年签订的那些保单在之后的第 t 年里出现的理赔额, $t = 0, 1, \cdots, T - j$. 这种情况下的一个信度模型是

$$X_{jt} = (m + \Xi_j)d_t + \Xi_{jt}, \tag{7.29}$$

其中数字 d_t 是一些发展因子 (可以假设它们的和等于 1), 表示在第 t 年理赔占总额的比例, $m + \Xi_j$ 表示在 j 年签订的保单在所有发展阶段的累积理赔总额. ∇

例 7.3.8(回归模型; Hachemeister) 我们还可以通过引入一些间接数据来推广模型 (7.5). 例如, 如果 y_{jt} 代表合同 j 的某个风险特征 (如保单持有人在第 t 年的年龄), 那么 Ξ_j 可以写成 y_{jt} 的一个线性随机函数. 于是在第 t 年的理赔等于

$$\{m^{(1)}+\Xi_j^{(1)}\}+\{m^{(2)}+\Xi_j^{(2)}\}y_{jt}+\Xi_{jt}, \tag{7.30}$$

这是一个信度回归模型. 当 $\Xi_j^{(k)}\equiv 0\ (k=1,2)$ 时, 该模型便是经典的一维回归模型. 这意味着没有隐性风险特征. 诸如 (7.30) 这样的信度模型最初是由 Hachemeister 引入并加以研究的. ∇

§7.4 Bühlmann-Straub 模型

正如 (7.7) 那样, 在 Bühlmann-Straub 模型中观测值可以作如下分解:

$$X_{jt}=m+\Xi_j+\Xi_{jt},\quad j=1,\cdots,J,\quad t=1,\cdots,T+1, \tag{7.31}$$

其中不可观测的风险分量 $\Xi_j, j=1,2,\cdots,J$, 是具有均值 0 和方差 a 的 iid 随机变量列; Ξ_{jt} 也是独立的具有均值 0 的随机变量列. 假设分量 Ξ_j 与 Ξ_{jt} 也是独立的. Bühlmann 模型和 Bühlmann-Straub 模型的差别在于后者中分量 Ξ_{jt} 的方差等于 s^2/w_{jt}, 其中 w_{jt} 是附着在观测数据 X_{jt} 上的 *权*. 该权代表各个观测数据的相对精度. 设 X_{jt} 表示 w_{jt} 个复制的平均, 即 $X_{jt}=\sum_k X_{jtk}/w_{jt}$, 其中 $X_{jtk}=m+\Xi_j+\Xi_{jtk}$ 且 Ξ_{jtk} 是 iid 的具有均值 0 和方差 s^2 的随机变量列. 随机变量 Ξ_{jtk} 表示第 j 组第 k 个个体合同在第 t 个阶段偏离风险保费 $m+\Xi_j$ 的大小. 在这种情况下, 上面的权被称为 *自然权重*. 不过有时自然权是得不到的, 或者另有一个机制导致不同的方差. 那时我们可以用一个单元的保费总额来作近似.

为了找到 *风险保费* $m+\Xi_j$ (见注 7.2.6) 的最佳齐次线性预报量, 我们必须最小化下面的均方误差:

$$\begin{aligned}&\min_{h_{it}} E\left[\left\{m+\Xi_j-\sum_{i,t}h_{it}X_{it}\right\}^2\right]\\ &\text{s.t.}\quad E[m+\Xi_j]=\sum_{i,t}h_{it}E[X_{it}].\end{aligned} \tag{7.32}$$

为此, 我们需要用到下面一些记号 (参阅 (7.10)~(7.12)):

$$\begin{aligned}&w_{j\Sigma}=\sum_{t=1}^{T}w_{jt}, \qquad w_{\Sigma\Sigma}=\sum_{j=1}^{J}w_{j\Sigma},\\ &z_j=\frac{aw_{j\Sigma}}{s^2+aw_{j\Sigma}}, \qquad z_\Sigma=\sum_{j=1}^{J}z_j;\end{aligned} \tag{7.33}$$

$$X_{jw} = \sum_{t=1}^{T} \frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}} X_{jt}, \qquad X_{ww} = \sum_{j=1}^{J} \frac{w_{j\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} X_{jw}, \qquad X_{zw} = \sum_{j=1}^{J} \frac{z_j}{z_\Sigma} X_{jw}.$$

注意 X_{jw} 和 X_{ju} 之间的区别. 如果 w 作为一个角标出现, 就表明已经有了对该角标的一个加权求和, 其中用的是观测值的自然权 或者其它什么权. 角标 z 用来表示信度权的一个加权求和, 而符号 $\sum$ 用来表示一个没有加权的和. 在我们的记号中我们不允许观测时间段 T 有不同的值. 最简单的弥补办法是在必要时记某些观测值的权为 0.

在下面的定理 7.4.1 中, 我们要来推导 (7.32) 中系数 h_{it} 的最优值. 这些最优值给出了风险保费 $m + \Xi_j$ 的最小均方误差估计量如下 (见 (7.9)):

$$z_j X_{jw} + (1 - z_j) X_{zw}, \tag{7.34}$$

这里 X_{jw} 是风险保费的个体估计量, X_{zw} 是信度加权集体估计量, 且 z_j 表示合同 j 的信度因子.

用 Lagrange 最优化可以证明, 在估计 $m + \Xi_j$ 时, (7.34) 是所有具有相同均值的经验数据线性组合中具有最小均方误差的一个估计量. 我们必须通过求解一阶方程组来找到一个极值. 在下面的证明中我们需要用到一个事实, 即在给定均值的不相关随机变量的线性组合中, 系数反比于方差的那个线性组合的方差达到最小; 见习题 §7.4 第 1 题. 首先我们推导第 i 组合同的最优 "混合" $h_{it}/h_{i\Sigma}$. 可以证明最好的选择是 $h_{it}/h_{i\Sigma} = w_{it}/w_{i\Sigma}$; 由此可见观测值 X_{it} 必须以 X_{iw} 的形式出现在 (7.32) 中, 其次推证那些组 i ($i \neq j$) 的系数总和 $h_{i\Sigma}$ 的最好选取方式是正比于 z_j. 最后我们推导出 $h_{j\Sigma}$ 的最优值.

定理 7.4.1(Bühlmann-Straub 模型; 齐次估计量) 模型 (7.31) 中的风险保费 $m + \Xi_j$ 的最小均方误差齐次无偏预报量 $\sum_{i,t} h_{it} X_{it}$ 是信度估计量 (7.34).

证明 由 (7.32), 可知在寻找 $m + \Xi_j$ 的最佳预报量时我们必须求解下面的问题:

$$\min_{h_{it}: h_{\Sigma\Sigma}=1} E\left[\{m + \Xi_j - \sum_{i,t} h_{it} X_{it}\}^2\right]. \tag{7.35}$$

约束条件 $h_{\Sigma\Sigma} = 1$ 对应 (7.32) 中的无偏约束. 由这个约束条件可见 (7.35) 中的期望也是一个方差. 代入 X_{it} 的分解式 (7.31), 由 (7.35) 得到:

$$\min_{h_{it}: h_{\Sigma\Sigma}=1} \mathrm{Var}\left[(1 - h_{j\Sigma})\Xi_j - \sum_{i \neq j} h_{i\Sigma} \Xi_i - \sum_{i,t} h_{it} \Xi_{it}\right]. \tag{7.36}$$

由分量 Ξ_j 和 Ξ_{jt} 的方差以及它们之间的独立性, (7.36) 等同于

$$\min_{h_{it}: h_{\Sigma\Sigma}=1} (1 - h_{j\Sigma})^2 a + \sum_{i \neq j} h_{i\Sigma}^2 a + \sum_i h_{i\Sigma}^2 \sum_t \frac{h_{it}^2}{h_{i\Sigma}^2} \frac{s^2}{w_{it}}. \tag{7.37}$$

首先我们来优化内层和式. 由习题 §7.4 第 1 题, $h_{it}/h_{i\Sigma}$ 的最优值是 $w_{it}/w_{i\Sigma}$. 我们可以把观测值 X_{it}, $t=1,2,\cdots,T$, 换成它们的加权平均 X_{iw}, 然后得到信度估计量具有形式 $\sum_i h_{i\Sigma}X_{iw}$, 其中 $h_{i\Sigma}$ 的值待定.

内层和式的最小值等于 $s^2/w_{i\Sigma}$. 由 (7.33) 知 $a+s^2/w_{i\Sigma}=a/z_i$. 所以我们可以把 (7.37) 改写为如下形式:

$$\min_{h_{i\Sigma}:h_{\Sigma\Sigma}=1}(1-h_{j\Sigma})^2a+h_{j\Sigma}^2\frac{s^2}{w_{j\Sigma}}+(1-h_{j\Sigma})^2\sum_{i\neq j}\frac{h_{i\Sigma}^2}{(1-h_{j\Sigma})^2}\frac{a}{z_i}. \tag{7.38}$$

由于 $h_{\Sigma\Sigma}=1$, 我们有 $\sum_{i\neq j}h_{i\Sigma}/(1-h_{j\Sigma})=1$. 所以再根据习题 §7.4 第 1 题, (7.38) 中因子 $h_{i\Sigma}$, $i\neq j$, 的最优选择是

$$\frac{h_{i\Sigma}}{1-h_{j\Sigma}}=\frac{z_i}{z_\Sigma-z_j}. \tag{7.39}$$

(7.38) 中和式的最小值等于 $a/(z_\Sigma-z_j)$, 所以 (7.38) 给出

$$\min_{h_{j\Sigma}}(1-h_{j\Sigma})^2\left(a+\frac{a}{z_\Sigma-z_j}\right)+h_{j\Sigma}^2\frac{s^2}{w_{j\Sigma}}. \tag{7.40}$$

最后, 再一次利用习题 §7.4 第 1 题可以得到 $h_{j\Sigma}$ 的最优值. 读者可以自己验证, 该最优值是

$$\begin{aligned}h_{j\Sigma}&=\frac{w_{j\Sigma}}{\frac{s^2}{a+a/(z_\Sigma-z_j)}+w_{j\Sigma}}=\frac{1}{\frac{1/z_j-1}{1+1/(z_\Sigma-z_j)}+1}\\&=\frac{z_j(z_\Sigma-z_j+1)}{(1-z_j)(z_\Sigma-z_j)+z_j(z_\Sigma-z_j+1)}=z_j+(1-z_j)\frac{z_j}{z_\Sigma}.\end{aligned} \tag{7.41}$$

由 (7.39) 得 $h_{i\Sigma}=(1-z_j)z_i/z_\Sigma$, 这意味着 (7.34) 果真是风险保费 $m+\Xi_j$ 在最小均方误差意义下最佳齐次无偏线性预报量. ▽

注意到如果把 (7.31) 中的 Ξ_j 换成常数 ξ_j, 即取 $a=0$, 我们便得到了经典的加权平均 X_{ww}. 这是因为此时 X_{jw} 的相对权 $w_{j\Sigma}$ 等于信度权 z_j.

与 (7.32) 中 X_{jt} 的齐次线性组合相比, $m+\Xi_j$ 的 非齐次 估计量仅仅多包含了一个常数 h. 如类似于定理 7.2.4, 我们可以证明在这种情况下无偏性的限制是多余的. 除非要把 (7.34) 中的 X_{zw} 换成 m, 这个非齐次估计量等于齐次估计量. 组 j 之外的观测值没有在这个估计量中出现. 对于非齐次估计量来说, s^2/a 和 m 的值必须是已知的. 在模型 (7.31) 下, 把 m 换成最佳估计量 X_{zw}, 我们又得到了齐次估计量. 同注 7.2.6 完全一样, $m+\Xi_j$ 的最佳预报量也是 $X_{j,T+1}$ 的最佳预报量. (7.34) 的渐近性质类似于在注 7.2.3 中给出的那些结果. 此外, 如在注 7.2.7 指出的那样, 信度保费可以由实际数据和虚拟数据组合在一起得出. 见习题.

Bühlmann-Straub 模型中的参数估计

本章中的这些信度估计量依赖于通常未知的结构参数 m, a 和 s^2. 为了在实际问题中应用这些估计量, 我们必须来估计这些结构参数. 下面的定理要推导出一些无偏估计量, 它们不依赖于通常未知的这些参数. 我们可以用这些新的估计量来取代信度估计量中的那些未知结构参数, 并且希望作为结果的估计仍然具有一些良好的性质. s^2 和 a 的估计量分别基于下面的组间加权平方和

$$\text{SSW} = \sum_{j,t} w_{jt}(X_{jt} - X_{jw})^2, \tag{7.42}$$

以及组内加权平方和

$$\text{SSB} = \sum_{j} w_{j\Sigma}(X_{jw} - X_{ww})^2. \tag{7.43}$$

注意到如果所有的权 w_{jt} 取为 1, 这些表达式便化为在 Bühlmann 模型中定义的 (7.2) 和 (7.3) 了.

定理 7.4.2(无偏参数估计) 在 Bühlmann-Straub 模型中, 统计量

$$\begin{aligned} \widetilde{m} &= X_{ww}, \\ \widetilde{s^2} &= \frac{1}{J(T-1)} \sum_{j,t} w_{jt}(X_{jt} - X_{jw})^2, \\ \widetilde{a} &= \frac{\sum_j w_{j\Sigma}(X_{jw} - X_{ww})^2 - (J-1)\widetilde{s^2}}{w_{\Sigma\Sigma} - \sum_j w_{j\Sigma}^2 / w_{\Sigma\Sigma}} \end{aligned} \tag{7.44}$$

是对应的结构参数的无偏估计量.

证明 $E[X_{ww}] = m$ 的证明是显然的. 利用协方差关系式 (7.15) 得

$$\begin{aligned} J(T-1)E[\widetilde{s^2}] &= \sum_{j,t} w_{jt} \left\{ \text{Var}[X_{jt}] + \text{Var}[X_{jw}] - 2\text{Cov}[X_{jt}, X_{jw}] \right\} \\ &= \sum_{j,t} w_{jt} \left\{ a + \frac{s^2}{w_{jt}} + a + \frac{s^2}{w_{j\Sigma}} - 2\left(a + \frac{s^2}{w_{j\Sigma}}\right) \right\} \\ &= J(T-1)s^2. \end{aligned} \tag{7.45}$$

对于 $\widetilde{a}$, 我们有

$$\begin{aligned} & E\left[\sum_j w_{j\Sigma}(X_{jw} - X_{ww})^2\right] \\ &= \sum_j w_{j\Sigma} \left\{ \text{Var}[X_{jw}] + \text{Var}[X_{ww}] - 2\text{Cov}[X_{jw}, X_{ww}] \right\} \end{aligned}$$

$$= \sum_j w_{j\Sigma} \left\{ a + \frac{s^2}{w_{j\Sigma}} + a \sum_k \frac{w_{k\Sigma}^2}{w_{\Sigma\Sigma}^2} + \frac{s^2}{w_{\Sigma\Sigma}} - 2 \left(\frac{s^2}{w_{\Sigma\Sigma}} + \frac{a w_{j\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} \right) \right\}$$

$$= a \sum_j w_{j\Sigma} \left(1 + \sum_k \frac{w_{k\Sigma}^2}{w_{\Sigma\Sigma}^2} - 2 \frac{w_{j\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} \right) + s^2 \sum_j w_{j\Sigma} \left(\frac{1}{w_{j\Sigma}} - \frac{1}{w_{\Sigma\Sigma}} \right)$$

$$= a \left(w_{\Sigma\Sigma} - \sum_j \frac{w_{j\Sigma}^2}{w_{\Sigma\Sigma}} \right) + (J-1)s^2. \tag{7.46}$$

在 (7.44) 中取 $E[\widetilde{a}]$, 利用 (7.45) 和 (7.46) 我们看出 $\widetilde{a}$ 也是无偏的. ∇

注 7.4.3(估计量的负性) 估计量 $\widetilde{s^2}$ 当然是非负的, 但是 $\widetilde{a}$ 很有可能是负的. 虽然这可能暗示我们 $a=0$, 但是在 $a>0$ 时 $\widetilde{a}$ 也照样会取负值. 我们来仔细分析一下例 7.2.1, 现在回到平衡 Bühlmann 模型之中, 所有的权 w_{jt} 等于 1. 在那种情况下按 (7.4) 定义 MSW 和 MSB, 于是定理 7.4.2 中 s^2 和 a 的估计量归结为

$$\widetilde{s^2} = \text{MSW}, \qquad \widetilde{a} = \frac{\text{MSB} - \text{MSW}}{T}. \tag{7.47}$$

为了估计 z, 我们把这些估计量代入 $z = \frac{aT}{aT+s^2}$, 得出如下的统计量:

$$\widetilde{z} = 1 - \frac{\text{MSW}}{\text{MSB}}. \tag{7.48}$$

利用 $X_{jt} = m + \Xi_j + \Xi_{jt}$ 且定义 $\overline{\Xi}_j = \frac{1}{T}\sum_t \Xi_{jt}$, 可以把 SSW 写为

$$\text{SSW} = \sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}(X_{jt} - \overline{X}_j)^2 = \sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}(\Xi_{jt} - \overline{\Xi}_j)^2. \tag{7.49}$$

由于假设了 Ξ_{jt} 是 iid 的且服从 $N(0,s^2)$ 分布, 上式右边除上 s^2 后服从 $\chi^2_{J(T-1)}$ 分布, 它独立于 $\overline{\Xi}_j$, 从而也具有平均值 $\overline{X}_j = m + \Xi_j + \overline{\Xi}_j$. 所以 MSW 独立于 $\overline{X}_j$, 从而也独立于 MSB.

假设分量 Ξ_j 是 iid 的且服从 $N(0,a)$ 分布, 用类似的方法可证

$$\frac{\text{SSB}}{a + s^2/T} = \frac{J-1}{aT+s^2}\text{MSB} \tag{7.50}$$

服从 χ^2_{J-1} 分布. 所以在上述正态假设下, 如果乘上一个常数因子 $s^2/(aT+s^2) = 1-z$, §7.2 中的方差比 MSB/MSW 仍然服从 $F_{J-1,J(T-1)}$ 分布. 于是,

$$(1-z)\frac{\text{MSB}}{\text{MSW}} = \frac{1-z}{1-\widetilde{z}} \sim F_{J-1,J(T-1)}. \tag{7.51}$$

按照这种方式, 可以对取不同值的 J, T 和 s^2/a 来计算 $\Pr[\widetilde{a}<0]$, 见习题 §7.4 第 9 题.

由 (7.47), 事件 $\widetilde{a} < 0$ 等价于 MSB/MSW< 1. 在 §7.2 中我们曾建立过下面结论: 只有当 MSB/MSW 超过 $F_{J-1,J(T-1)}$ 的一个右临界值 (该临界值当然要大于 1) 时数据才显示拒绝接受均值相等 (归结为现在的 $a = 0$). 于是我们看出, 尽管对每一个 $a > 0$ 有 $\Pr[\widetilde{a} < 0] > 0$, 得到这样的数值意味着基于该数据对 $a = 0$ 的一个 Fisher 检验未必就导致拒绝的结论. 这也意味着我们没有充分的统计理由不对每一个合同征收同样的保费.

为了在实际中估计 $a = \mathrm{Var}[\Xi_j]$, 人们倾向于使用 $\max\{0, \widetilde{a}\}$ 作为一个估计量, 虽然这仍是相合的, 但是已不再是一个无偏估计量了. ▽

注 7.4.4(信度加权平均和普通加权平均)　模型 (7.31) 中 m 的最佳无偏估计量不是 X_{ww} 而是 X_{zw}. 这与习题 §7.4 第 1 题是一致的, 事实上 X_{ww} 和 X_{zw} 都是随机变量列 X_{jw} 的线性组合, 它们的方差不是正比于原始的权 $w_{j\Sigma}$, 而是正比于由信度调整的权 z_j. 所以当我们使用的是信度加权平均 X_{zw} 而不是普通加权平均 X_{ww} 来估计 m 时, 我们得到一个较小的方差. 当然这里的问题是我们不知道要使用的信度因子 z_j, 因为这些因子依赖于我们正要估计的那些未知参数. 为了获得更好的估计量, 一个办法是利用迭代 *伪估计量*, 即通过确定某些方程的一个固定点来确定结构参数的估计值. 这些方法可以在更高级一些的信度理论文献中找到. ▽

§7.5　关于汽车保险理赔次数的负二项模型

本节我们来拓展例 7.3.2 的讨论. 考虑一个驾驶员, 其事故倾向性服从一个非退化分布, 并假设其事故倾向性等于 Λ, 即一年的理赔次数服从一个 Poisson(λ) 分布. 在这种情形下征收一个信度保费就给出一个经验费率系统, 类似于我们在第 6 章叙述的奖惩系统.

对一个汽车保单来说, 如果与保单持有人理赔行为相关的所有变量都可以被观测和使用, 理赔次数仍然是由一个随机过程产生的. 设该过程为泊松过程, 评估因子只能告诉我们精确的 Poisson 强度, 即一年理赔次数的 Poisson 参数. 我们知道理赔额的概率分布. 如果单元内保单的所有风险因子取共同的值, 则该单元是齐次的, 即所有的保单持有人具有同样的 Poisson 参数和理赔分布. 不过在实际中, 关于这些参数仍有一些不确定的因素, 这是因为我们不可能获得这些参数的所有相关信息, 所以这些单元是非齐次的. 这个非齐次性正好证实了使用奖惩系统是正确的. 在齐次情况下, 每一个保单代表着同样的风险, 没有理由在同一的单元中征收不同的保费.

理赔频数的非齐次性可以通过假设 Poisson 参数 λ 取自于一个结构变量 Λ 来建模, 设该结构变量的分布为 $U(\lambda) = \Pr[\Lambda \leqslant \lambda]$. 本节我们来看看驾驶员 j 在时间段 t 的理赔次数 X_{jt}. 设有 J 个驾驶员, 每个都已经在 T_j 个时间段里被观测. 为

方便起见，除非要涉及到前面的章节，我们均删去记号中的角标 j. 如 (7.5) 中那样，我们可以把驾驶员 j 在时间段 t 的理赔次数 $X_t = X_{jt}$ 作如下分解：

$$X_{jt} = E[\Lambda] + \{\Lambda_j - E[\Lambda]\} + \{X_{jt} - \Lambda_j\}. \tag{7.52}$$

这里 $\Lambda_j \sim \Lambda$ 是 iid 的. 最后的两个分量虽然不相关，但是也不独立 (见习题 §7.5 第 6 题). 分量 $\Lambda_j - E[\Lambda]$ 具有方差 $a = \mathrm{Var}[\Lambda]$, 而对于分量 $X_{jt} - \Lambda_j$ 来说，如在例 3.3.1 中那样，关系式 $\mathrm{Var}[X_{jt}] - \mathrm{Var}[\Lambda_j] = E[\Lambda]$ 成立. 由于我们作了 Poisson 分布的假设，两个结构参数 m 和 s^2 正好相同.

至此，除了前几阶矩外我们基本上没有考虑结构分布. 我们可以想到结构分布的几个模型. 鉴于伽玛分 布具有一些好的数学性质和拟合效果，我们将倾向于使用这一分布，后面我们将给出一个例子来说明这一点. 另一个可能的选择是结构分布 以概率 p 产生一个具有理赔频数 λ_1 的 "好" 驾驶员，或者产生一个具有理赔频数 $\lambda_2 > \lambda_1$ 的 "坏" 驾驶员. 于是任意一个驾驶员的理赔次数服从一个混合泊松分布， 其中混合分布是一个两点分布. 尽管人们会想到驾驶员类型多于两种，这个 "好驾驶员 / 坏驾驶员" 模型常常与实际中发现的数据拟合得很好.

如果结构分布 是 $\Gamma(\alpha,\tau)$ 分布， 那么驾驶员 j 在时间段 t 的理赔次数 X_t 的边缘分布是一个负二项分布， 其中 α 是负二项分布中需要的成功次数， $\tau/(\tau+1)$ 是一次成功的概率 (见例 3.3.1). 从文献 Lemaire (1985) 中我们可以找到一些数据，它们来自于比利时的一个拥有 $J = 106\,974$ 个保单的保单组合. 数字 n_k 代表发生 k 次事故的保单数目， $k = 0, 1, \cdots$. 如果 $X_t \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, 那么 λ 的极大似然估计量 $\hat{\lambda}$ 等于理赔的平均次数. 可以证明 (见习题), 在伽玛 - 泊松模型中， α 和 τ 的极大似然估计 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\tau}$ 为

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{\alpha}}{\overline{x}}, \quad 其中 \quad \overline{x} = \sum_{k=0}^{\infty} k\, n_k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} n_k, \tag{7.53}$$

且 $\hat{\alpha}$ 是如下方程的解：

$$\sum_{k=0}^{\infty} n_k \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \cdots + \frac{1}{\alpha+k-1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} n_k \log\left(1 + \frac{\overline{x}}{\alpha}\right). \tag{7.54}$$

由 (7.53) 可见，待估结构分布 的一阶矩以及理赔次数边缘分布的一阶矩都与一阶样本矩一致. 在好驾驶员 / 坏驾驶员模型中的参数 p, λ_1 和 λ_2 已经用矩法估计了. 注意到该方法未必一定能给出容许估计量 $\hat{\lambda}_i \geqslant 0$ 和 $0 \leqslant \hat{p} \leqslant 1$. 这三个参数最终的估计值分别为

$$\begin{aligned} &\hat{\lambda} = 0.1011, \\ &\hat{\alpha} = 1.6313, \qquad \hat{\tau} = 16.1384, \\ &\hat{p} = 0.9112, \qquad \hat{\lambda}_1 = 0.0762; \quad \hat{\lambda}_2 = 0.3576. \end{aligned} \tag{7.55}$$

我们对被观测和估计的频数列表如下：

k	n_k	$\hat{n}_k$ (Poisson)	$\hat{n}_k$ (负二项)	$\hat{n}_k$ (好 / 坏)
0	96 978	96 690	96 981	96 975
1	9 240	9 774	9 231	9 252
2	704	494	709	685
3	43	16.6	50.1	56.9
4	9	0.4	3.4	4.6
5+	0	0.0	0.2	0.3
χ^2		191	0.1	2.1

最下面一行的 χ^2 值代表通常的 χ^2 统计量，由 $\chi^2 = \sum_k (n_k - \hat{n}_k)^2/\hat{n}_k$ 来计算. 在计算 χ^2 统计量时，人们常常把被估计的理赔次数小于 5 的那些单元组合到它们相邻的单元之中. 这样，最后的三行被合并成一行，代表三个或者更多的理赔. 这两个混合模型给出了一个完美的拟合效果；事实上，负二项模型的拟合效果好得简直让人难以置信. 注意到我们用两到三个参数来拟合四个数字. 但是无论如何该保单组合的齐次性是应该被毋庸置疑地拒绝的.

尽管原假设“每一个保单持有人的理赔次数是具有相同参数的独立泊松随机变量”被拒绝了，这并不意味着混合泊松模型不正确. 尽管我们不可以简单地下结论“保单持有人共同具有一个来自某结构分布 的无法观测的风险参数”. 但是认为那些理赔次数是独立的负二项 随机变量列或许也是恰当的，例如当理赔次数构成一个泊松过程 且其强度参数来自一个独立的伽玛结构分布时.

利用本节的模型，我们想尽可能准确地预测一个保单持有人在接下来的时间段 $T+1$ 产生的理赔次数. 该理赔次数是一个 Poisson(λ) 随机变量，其中 λ 是 Λ 的一个观测值，而 Λ 的先验分布 已知 (例如服从 $\Gamma(\alpha,\tau)$ 分布). 此外，过去的观测值 $X_1,\cdots,X_T$ 是已知的. 我们可以证明，给定 $X_1 = x_1,\cdots,X_T = x_T$ 时，Λ 的后验分布 也是一个伽玛分布，其参数被调整为 $\tau' = \tau + T$ 和 $\alpha' = \alpha + x_\Sigma$, 其中 $x_\Sigma = x_1 + \cdots + x_T$. 采用二次损失函数，利用习题 §7.2 第 9 题，接下来一年理赔次数的最佳预报量是 Λ 的后验期望：

$$\lambda_{T+1}(x_1,\cdots,x_T) = \frac{\alpha + x_\Sigma}{\tau + T}. \tag{7.56}$$

倘若我们对每一个人在长度为 τ 的时间段计入 α 个虚拟理赔 记录，那么 (7.56) 可以解释为单位时间上观测到的平均理赔次数. 见注 7.2.7.

预报 (7.56) 是信度预报 的一个特殊形式. 该信度预报正比于先验保费和保单平均值的一个线性组合，这是因为 (见 (7.10))：

$$\frac{\alpha+x_\Sigma}{\tau+T}=z\frac{x_\Sigma}{T}+(1-z)\frac{\alpha}{\tau},\quad 其中\quad z=\frac{T}{\tau+T}. \tag{7.57}$$

注 7.5.1(非线性估计量；精确的信度) 在定理 7.2.2 和定理 7.2.4 中，我们要求 $X_{j,T+1}$ 的预报量是观测值的线性函数形式. 尽管一般来说这些观测值的线性函数最易于处理，我们还是来看一看观测值更一般的函数形式. 没有了线性性的局限，$X_{j,T+1}$ 的在均方误差意义下最佳的预报量是所谓的后验 Bayes 估计，该估计正好等于条件期望 $E[X_{j,T+1}|X_{11},\cdots,X_{JT}]$ (见 (7.56)). 如果 Ξ_j 和 Ξ_{jt} 是独立正态随机变量列，则最佳线性估计与 Bayes 估计 相同. 在文献中这被称为 "信度期望正好是 Bayes 的". 此外，把一个伽玛先验分布 和一个 Poisson 后验分布组合起来也会得到如此的 "准确的信度", 这是因为后验 Bayes 估计正好等于观测值的线性函数 (见习题 §7.5 第 2 题). 理赔额的后验均值等于信度保费 (7.57). ∇

如果我们按照平均值原理把整个保单组合必须的保费分割开来，那么由于下面的一些原因，我们得到了一个基于信度的经验费率系统 (请参阅 Lemaire (1985)):

1. 系统是公平的. 在续保时，每一个保户缴纳的保费与考虑到他过去所有信息而估计出的期望理赔频数 (7.56) 成正比.

2. 系统在财政上是平衡的. 记 $X_\Sigma=X_1+\cdots+X_T$ 为产生理赔的总次数，于是 $E[X_\Sigma]=E[E[X_\Sigma|\Lambda]]=TE[\Lambda]$, 所以

$$E\left[\frac{\alpha+X_\Sigma}{\tau+T}\right]=\frac{\alpha+T\frac{\alpha}{\tau}}{\tau+T}=\frac{\alpha}{\tau}. \tag{7.58}$$

这意味着对每一个保单来说，比例因子 (7.56) 的平均值等于总平均 α/τ. 所以任意一个驾驶员要缴纳的保费的期望值每年保持为一个常数.

3. 保费仅仅依赖于前 T 年记录的理赔次数，而不管那些理赔究竟是在整个阶段的什么时候发生的. 所以，过去五年的理赔都发生在第一年或者都发生在最后一年对接下来一年保费的制定不产生任何影响. §6.2 介绍的奖惩系统不具有这个性质. 不过我们也质疑这个性质究竟应不应该成立. 如果像现在这样假设强度参数 λ 是一个常数，则 K 是一个充分统计量. 然而在实际中 λ 的值并非一个常数. 任何情况都会随着时间的变化而变化，青春不会永存，人也不可能永远保持最活跃的状态，随着时间的流逝，他的儿子会长大并且会借用家里的汽车. 由这些实际原因，后面的观测数据必须比前面的数据起得作用更大一些.

4. 在最初的时刻 $t=0$ 每个人缴纳相同的正比于 α/τ 的保费. 而随着 T 趋于 ∞, 比值 $(\alpha+x_\Sigma)/(\tau+T)$ 的期望收敛于 x_Σ/T, 这个极限代表着该保单的实际风险. 同时，方差 $(\alpha+x_\Sigma)/(\tau+T)^2$ 收敛于 0. 所以最终每个人缴纳的保费对应于他自己的风险；虚拟数据的影响会逐渐消逝.

我们使用值 $\alpha=1.6$ 和 $\tau=16$(见 (7.55) 和 Lemaire (1985)) 构造了表 7.1, 该表在各种不同的观测时间长度和观测到的理赔次数情况下给出理赔频数的最优估

计. 初始保费定为 100%, 后验保费由如下公式计算:

$$100\frac{\lambda_{T+1}(x_1,\cdots,x_T)}{\lambda_1}=\frac{100\frac{\alpha+x_\Sigma}{\tau+T}}{\alpha/\tau}=100\frac{\tau(\alpha+x_\Sigma)}{\alpha(\tau+T)}. \tag{7.59}$$

从表 7.1 可以看出, 在过去 10 年中恰好发生 1 次理赔的驾驶员与一个新驾驶员的风险相同, 这里我们假设了该新驾驶员在 16 年中出现 1.6 次虚拟理赔 记录. 如果一个人在 10 年里面没有发生理赔, 则他可以得到一个折扣 $1-\tau/(\tau+10)=38\%$. 而如果他在 16 年出现一个理赔时, 则真实记录和虚拟记录在保费中起的作用一样大.

表 7.1　来年理赔频数占新驾驶员理赔频数的百分比的最优估计

	理赔次数 k				
年数 t	0	1	2	3	4
0	100				
1	94	153	212	271	329
2	89	144	200	256	311
3	84	137	189	242	295
4	80	130	180	230	280
5	76	124	171	219	267
6	73	118	164	209	255
7	70	113	157	200	243
8	67	108	150	192	233
9	64	104	144	184	224
10	62	100	138	177	215

例 7.5.2(与第 6 章奖惩系统的对照)　作为一个例子, 我们来看看当一个驾驶员在第一个观测年出现了一个理赔记录后他在投保的第 6 年应该缴纳的保费情况. 在表 7.1 中, 他的来年保费等于 124%. 在表 6.1 的系统中, 由于阶梯路径是 $2\to1\to2\to3\to4$, 他要缴纳第 5 步保费等于 70%. 按照表 7.1 缴纳的保费总和等于新驾驶员缴纳的保费的 $100+153+144+137+130+124=788\%$ 倍. 在表 6.1 的系统中, 该百分比只是 $100+120+100+90+80+70=560\%$. 注意到按照表 7.1, 理赔发生在观测年的第 1 年还是第 5 年对制定来年保费没有影响, 而实际上这对理赔总额是有影响的. ∇

注 7.5.3(重叠理赔次数)　设一个保单持有人, 其 T 年的理赔记录是已知的. 如果有 x_Σ 个理赔被记录了, 那么期望理赔次数 Λ 的后验分布是 $\Gamma(\alpha+x_\Sigma,\tau+T)$ 分布. 如 Lemaire (1985) 所指出的那样, 当 $T=3$ 时在 $x_\Sigma=0$ 和 $x_\Sigma=2$ 两种情形下来年保费会相差一个因子 $189/84=2.25$. 但是两个理赔次数的后验分布在相当大的程

度上是重叠的. 实际上, 在第一种情况下, 由于 $G(0.0842;\alpha,\tau+T)=0.605$, 那些具有类似理赔记录的驾驶员的理赔次数少于平均数 $\alpha/(\tau+T)=0.0842$ 的概率是 60.5%; 而在第二种情况下, 由于当 $x_\Sigma=2$ 和 $T=3$ 时有 $G(0.0842;\alpha+x_\Sigma,\tau+T)=0.121$ 成立, 具有比上述驾驶员平均水平更好的泊松参数的概率也很大. 对那些"好的"却又在导致理赔上倒霉透顶的驾驶员来说, 基于任何一个奖惩 系统的经验费率都证明是非常不公平的. ∇

§7.6 习 题

§7.2

1. 通过补充和推导 (7.15) 中的协方差关系式来完成定理 7.2.2 和定理 7.2.4 的证明. 使用并验证协方差的线性性: 对所有的随机变量 X,Y 和 Z, 我们有 $\mathrm{Cov}[X,Y+Z]=\mathrm{Cov}[X,Y]+\mathrm{Cov}[X,Z]$, 并且对所有的实数 α, 有 $\mathrm{Cov}[X,\alpha Y]=\alpha\mathrm{Cov}[X,Y]$.

2. 设 $X_1,\cdots,X_T$ 是一列具有均值 m 和方差 s^2 的互不相关随机变量. 考虑加权平均 $X_w=\sum_t w_tX_t$, 其中 $w_t\geqslant 0, t=1,\cdots,T$, 满足 $\sum_t w_t=1$. 证明 $E[X_w]=m$, $\mathrm{Cov}[X_t,X_w]=w_ts^2$ 和 $\mathrm{Var}[X_w]=\sum_t w_t^2s^2$.

特别地, 当 $w_t\equiv\frac{1}{T}$ 时有 $X_w=\overline{X}$, 从而我们得到 $E[\overline{X}]=m$ 和 $\mathrm{Cov}[X_t,\overline{X}]=\mathrm{Var}[\overline{X}]=\frac{s^2}{T}$.

3. 证明样本方差 $S^2=\frac{1}{T-1}\sum_1^T\{X_t-\overline{X}\}^2$ 是 s^2 的一个无偏估计量.

4. 在定理 7.2.2 的情形下, 证明 $X_{j,T+1}$ 的最佳预报量同时也是风险保费 $m+\Xi_j$ 的最佳估计量. Ξ_j 的最佳线性无偏估计量 (BLUE) 是什么?

5. 求信度保费 (7.9) 的方差和均方误差. 再求作为 $m+\Xi_j$ 的一个估计量的 (7.9) 的均方误差.

6. 如果去掉定理 7.2.2 条件中的无偏性, 求信度估计量, 并研究导致的偏差.

7. 如果每一个合同缴纳的是齐次保费, 证明信度保费的和等于阶段内平均每年的支出.

8. 证明在模型 (7.5) 中 MSB 的均值是 $aT+s^2$, MSW 的均值是 s^2.

9. 对每一个随机变量 Y, 证明其在均方误差意义下的最佳预报量是实数 $p=E[Y]$.

10. 设 $\boldsymbol{X}=(X_{11},\cdots,X_{1T},X_{21},\cdots,X_{2T},\cdots,X_{J1},\cdots,X_{JT})^{\mathrm{T}}$ 是由 (7.7) 中那些可观测的随机变量构成的一个向量. 试叙述协方差矩阵 $\mathrm{Cov}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}]$.

§7.3

1. 为了把协方差分解为条件方差, 请推导公式

$$\mathrm{Cov}[X,Y]=E[\mathrm{Cov}[X,Y|Z]]+\mathrm{Cov}[E[X|Z],E[Y|Z]].$$

§7.4

1. 设 $X_1,\cdots,X_T$ 是一列独立随机变量, 分别具有方差 $\mathrm{Var}[X_t]=s^2/w_t$, 其中 w_t 是某些正数, $t=1,\cdots,T$. 证明线性组合 $\sum_t\alpha_tX_t$(其中 $\alpha_\Sigma=1$) 的方差 $\sum_t\alpha_t^2s^2/w_t$ 在 $\alpha_t\propto w_t$ 时达到最小, 这里符号 $\propto$ 表示"正比于". 于是最优解为 $\alpha_t=w_t/w_\Sigma$. 再证明在这种情况下方差的最小值是 s^2/w_Σ.

2. 证明在模型 (7.31) 中我们有 $\mathrm{Var}[X_{zw}]\leqslant\mathrm{Var}[X_{ww}]$(见注 7.4.4).

3. 求 m 的最佳齐次线性估计量.

4. 试说明在求 $m+\Xi_j$ 的最佳非齐次线性估计量时无偏性的限制是多余的.

5. 请说明，如注 7.2.6 所言，在 Bühlmann-Straub 型中 $X_{j,T+1}$ 和 $m+\Xi_j$ 的最佳预报量相同.

6. 叙述 (7.33) 中的 z_j 的渐近性 (参阅注 7.2.3).

7. 用与注 7.2.7 同样的方法把信度保费 (7.34) 描述为实际记录和虚拟记录的一个混合.

8. 试说明在由 (7.31) 给出的 Bühlmann-Straub 模型的特殊场合 (7.5)~(7.6) 下 (7.9) 可以由 (7.34) 给出.

9. 在注 7.4.3 的情形下，试用 F- 表来说明当 $s^2/a=0.823$, $J=5$ 和 $T=4$ 时事件 $\tilde{a}<0$ 的概率等于 0.05.

10. 设在 Bühlmann-Straub 模型中 3 个合同 3 年的理赔记录已知，且每一个的权取为 $w_{jt}\equiv 1$, 求信度保费. 这些合同的理赔情况如下：

	$t=1$	$t=2$	$t=3$
$j=1$	10	12	14
$j=2$	13	17	15
$j=3$	14	10	6

§7.5

1. [♠] 设 $X_1,\cdots,X_J$ 是来自于具有参数 α 和 $\tau/(\tau+1)$ 的负二项分布 的一组样本. 定义取值 k 的随机变量的个数为 $N_k=\#\{j|X_j=k\}, k=0,1,\cdots$. 如果 $N_k=n_k$, $k=0,1,\cdots$, 请说明 α 和 τ 的极大似然估计由 (7.53) 和 (7.54) 给出.

2. [♠] 设 Λ 的先验分布是 $\Gamma(\alpha,\tau)$ 分布，给定 $\Lambda=\lambda$ 时年理赔次数 $X_1,\cdots,X_T$ 构成独立 Poisson(λ) 随机变量列. 证明在给定 $X_1=x_1,\cdots,X_T=x_T$ 时 Λ 的后验分布是 $\Gamma(\alpha+x_\Sigma,\tau+T)$ 分布， 其中 $x_\Sigma=x_1+\cdots+x_T$.

3. 通过比较上一题的 $\Pr[X_2=0]$ 和 $\Pr[X_2=0|X_1=0]$ 来说明理赔次数 X_t 不是独立的. 再说明它们也不是不相关的.

4. 证明 $\Gamma(\alpha,\tau)$ 分布 的众数 (即使得密度达到最大的自变量的值) 等于 $(\alpha-1)_+/\tau$.

5. [♠] 如果 α 和 τ 的值由矩估计方法给出，试求 n_k 和 χ^2- 检验统计量的估计值.

6. 说明在本节模型 (7.52) 中的随机变量 Λ_j 和 $X_{jt}-\Lambda_j$ 不相关. 取定 $\alpha=1.6$ 和 $\tau=16$ 后求比值 $\mathrm{Var}[\Lambda_j]/\mathrm{Var}[X_{jt}]$.

7. [♠] 在表 7.1 中系统的 Loimaranta 功效指的是什么？稳态分布指的是什么？

第 8 章　广义线性模型

§8.1　引　论

在计量经济学中，运用最为广泛的统计技巧是多元线性回归. 不过，这一技巧却并不总是适用于精算统计模型. 回归分析中假定随机扰动服从这样的一些正态分布：其方差取常值，而均值则为附属数据的线性函数. 但在精算学应用中，具有固定方差的对称正态随机变量却不能适当地描述这种情形. 例如，当第 4 章中关于泊松过程的假定成立时，一般而言，泊松分布是一理想的模型. 对这些随机变量而言，其均值与方差是相同的；不过，实践中采集的数据往往显示方差要大于均值. 又如，用于描述索赔额的分布通常具有厚重的右尾. 这样，与其假定方差不依赖于均值，不如假定变异系数取常值. 此外，有待建模的现象极少关于附属数据是可加的，可乘模型往往更受青睐. 从城镇移居乡村，或换用一辆轻 200 公斤的汽车，但维持保单的其它特征不变时，往往可能使平均总索赔额减少它的某一固定的百分比，而不会减少一个与原有风险无关的固定量.

这两个问题皆可绕开通常的线性模型，而借助广义线性模型加以解决 (以下有时以英文称谓 Generalized Linear Models 的缩略词 GLM 来简记广义线性模型). 这一推广是双重意义的. 首先，它允许偏离均值的随机误差服从有别于正态的另一种分布. 事实上，此随机误差可服从指数散布族中的任一种分布，自然包含了正态分布、泊松分布、(负) 二项分布、 伽玛分布与逆高斯分布等. 其次，无需要求随机变量的均值是解释变量的线性函数，而仅要求它依某一量度是线性的. 譬如，当这一量度为对数时，我们事实上便以可乘模型替代了可加模型.

通常，人们并不专注于观测值自身，而是选取它们这样的一种转换值，即这些转换值能以其正态性 (从而含对称性), 再伴之以常方差与可加的系统效应而较好地符合通常的多元回归 模型的要求. 不过，并不总能达到上述目的. 譬如，使泊松随机变量对称化 (偏度近似地为零) 的变换可取为 $Y^{2/3}$, 但稳定方差的变换却为 $Y^{1/2}$, 而将可乘系统效应化为可加情形的变换则为 $\log Y$. 此外，转换模型中的若干最优化性质，诸如无偏性，乃至有些情形的相合性，在返转至原来的量度时有可能不复存在.

本章中，我们将不在最一般的框架下讨论广义线性模型. 为简便起见，仅限于交叉分类的观测数据，这些数据可自然地列入到一个二维的表格中. 同随机变量 X_{ij} 有关的附属数据是行数 i 与列数 j. 在下一章，我们将把 “对角数”$i+j-1$ 也

视为解释变量. 关于更一般的模型, 即多于二维的表格, 可参看其它的教材. 一般而言, 观测值被设置成一个由 n 个独立但不同分布的随机变量组成的向量, 这时存在一个以一种直接可用的方式包含解释变量的设计矩阵.

很多精算问题可以利用特殊的广义线性模型来处理, 这里仅提及方差分析, 泊松回归以及分对数 (logit) 与概率单位 (probit) 模型等不多的几类. 这些模型可应用于 IBNR 问题 (这点将在下一章予以说明), 生存数据与复合泊松分布. 此外, 不难发现, 许多备受推崇的具启示意义的精算技巧事实上可归类于 GLM. 在第 6 章引出奖惩系统的研究中, 估计技巧的选择虽源自于它们简单的启示式的特征, 但它们同时也构成了某类特定 GLM 的极大似然估计. 同样的情形对于 IBNR 估计中某些广泛使用的技巧也成立, 这点将在下一章中予以解释. 有别于信度理论, 有很多商用软件可用于处理 GLM. 除了由 NAG(Numerical Algorithams Group, 数值算法组) 研制的专用程序 GLIM (Generalized Linear Interactive Modelling, 广义线性迭代建模), 我们还特别提及包含在广为使用的 SAS 与 S-Plus 两程序中的 GenMod 模块. 广义线性模型的研究始于 Nelder 与 Wedderburn 的工作. 他们以 GLM 的形式给出了包含方差分析、概率单位 分析在内的多种统计方法的统一描述. 他们还给出了一种最优与有效地估计所有这些模型的一个算法. 在 GLIM 的近期版本中, 另有其它的算法用于改善某些情况下的稳定性.

在 §8.2, 我们将简单地介绍通常的与广义的线性模型.　在 §8.3 中我们将指出, 精算实践中有些费率厘定技巧恰可表为 GLM. 在 §8.4, 我们将研究作为拟合优劣测度的偏差 (或比例偏差). 对于正态分布而言, 此量是残差 的平方和, 从而是和 χ^2 有关的统计量; 但一般而言, 它们是和对数似然函数有关的. 在 §8.5 中我们将给出一个例子. 在 §8.6, 我们参照其它一些 GLM 教材的观点, 将叙述有关 GLM 的另外一些理论. 具体地说, 我们将给出一个 GLM 的一般性定义, 将简短地叙述 Nelder 与 Wedderburn 的适用于所有目标的算法, 还将解释什么是典则联结. 至于有关 GLM 对于 IBNR 问题的应用, 可参见下一章.

§ 8.2　广义线性模型

广义线性模型具有以下三个特征:

1. 存在一 **随机分量**, 确切地说, 假定观测量是以指数散布族为其密度的 **相互独立** 的随机变量 $Y_i, i=1,\cdots,n$. 就我们的目的而言, 最重要的例子有:

- 正态随机变量 $N(\mu_i,\psi_i)$;
- 泊松随机变量 Poisson(μ_i);
- 总体服从泊松分布 Poisson(μ_i) 的样本容量为 $n_i=1/\psi_i$ 的样本均值;
- ψ_i 与二项随机变量的积: $\psi_i\times\mathrm{B}(\frac{1}{\psi_i},\mu_i)$ (从而表示 $1/\psi_i$ 次试验中的成功的

次数);

- 伽玛随机变量 $\Gamma(\frac{1}{\psi_i}, \frac{1}{\psi_i \mu_i})$
- 逆高斯随机变量 $\mathrm{IG}(\frac{1}{\psi_i \mu_i}, \frac{1}{\psi_i \mu_i^2})$.

从上述所有例子中可看出，所选择的参数化可保证它们的均值皆等于 μ_i，但 ψ_i 却是这样一种参数：它并不改变均值，而仅影响随机变量的方差 (见习题 §8.2 第 1 题). 我们取 ψ_i 等于 ϕ/w_i，并称 ϕ 为 *散布参数*，而称 w_i 为 *权重*. 恰如前一章 Buhlmann-Straub 可信性模型中所述的权重，它通常表示这样一些独立同分布的观测个数，以保证 Y_i 恰为这些独立同分布观测的算术平均 (通常称这样的权重为自然权重). 譬如，二倍 ψ_i 与二倍权重 (样本容量) 对于方差产生的效应是相同的.

2. 模型的 *系统分量* 为每一观测量指配一个 *线性预估量* $\eta_i = \sum_j x_{ij}\beta_j$，它是诸参数 $\beta_1, \cdots, \beta_p$ 的线性函数.

3. Y_i 的期望值 μ_i 借助 *联结函数* 与线性预估量 η_i 联结： $\eta_i = g(\mu_i)$.

注 8.2.1(典则联结) 每一分布均对应于一自然的联结函数，通常称为 *典则联结函数*. 起用这些联结函数具有若干技术上的便利之处 (见 §8.6). 譬如，对于正态分布，典则联结是恒同函数，从而导致一可加模型；对于泊松分布，典则联结是对数函数，从而得到一对数线性模型，即可乘模型；对于伽玛分布，典则联结是倒数. ▽

注 8.2.2(方差函数) 注意，在上述随机分量中采用的参数化既不总是最常见的，也不是最方便的. 若以参数 μ_i 表示均值，在每一情形总可找到一函数 $V(\cdot)$，使得方差等于 $V(\mu_i)\psi_i$. 通常称这样的函数 $V(\cdot)$ 为 *方差函数*. 暂时假定 $w_i = 1$，从而对每一观测 i 皆有 $\psi_i = \phi$. 在随机分量中列举的诸分布已囊括多种方差函数，从而使得对大量精算问题恰当地建模成为可能. 以下依方差函数中 μ 的幂次的升幂序，分别表述之：

1. 具有常值方差 $\sigma^2 = \mu^0 \phi$ 的正态分布 (同方差性);

2. 方差与均值相等的泊松分布以及泊松总体的样本均值. 对前者，我们有 $\sigma^2 = \mu^1$，对后者而言，方差与均值成正比，即有 $\sigma^2 = \mu^1 \phi$;

3. 如列举的参数化所示， $\Gamma(\alpha, \beta)$ 分布具有固定的形状参数，从而其变异系数 σ/μ 取常值，故有 $\sigma^2 = \mu^2 \phi$;

4. 如列举的 μ, ϕ 参数化所示， $\mathrm{IG}(\alpha, \beta)$ 分布 的方差等于 $\frac{\alpha}{\beta^2} = \sigma^2 = \mu^3 \phi$.

Y_i 的方差描述了第 i 个观测量的精度. 如不计权重，对正态 随机变量而言，此精度恒为常值；对泊松 随机变量而言，此精度与参数有关：参数越大，精度越小. 于是，较小观测量的残差要比较大观测量的残差小. 这一现象对伽玛分布 甚至更为明显. 逆高斯分布也如此. ▽

注 8.2.3(“零” 与 “全” 模型) 我们研究的最不精细的线性模型仅以常数项作为系统分量，从而把所有变异皆归因于偶然性，且否认附属数据的任何影响. 在广

义线性模型的文献中，通常称这一模型为 *零模型*. 此模型中假定每一观测量具有相同的分布，从而样本均值 $\overline{Y}$ 是每一 μ_i 的最优估计量. 另一极端，即所谓的 *全模型*. 这类模型假定观测 i 的每一单元均有它自己的参数. 若使总似然函数最大，便知观测量 Y_i 是一估计量. 该模型仅重复地表述数据，对其既不作任何浓缩，也不赋予任一结构. 在此模型中，把观测量之间的所有变异皆归因于系统分量. 一般而言，零模型过于粗糙；而就实用的目的而言，全模型又含有太多的参数. 于是，在这两者之间，人们往往企求一个 "最优" 的模型. 该模型必须拟合得好，即使得预估的结果和实际的观测值较接近. 另一方面，若模型的参数越少，不仅仅越容易 "销售" 给潜在的保单持有者，尤其更易 "销售" 给管理者. 后者坚持较薄的收费目录册和一个可操作与易理解的模型. 这样，在模型的 *预测力度* 与它的 *易管理性* 之间必须寻求一种折衷. ∇

在分析广义线性模型时， 评判一个模型优劣的量化准则是该模型的对数似然函数. 熟知，在零假设下，模型的某种细化未必是一种实际的改进；但以对数似然函数 ($\times 2$, 再除以散布参数 ϕ) 表示的赢利却近似地服从这样一种 χ^2 分布， 其自由度恰等于有待额外地予以估计的参数个数. 基于上述事实，可以逐一检测顺次细化的模型，并确定其中哪一种细化导致一个以极大似然值表示的有显著改进的拟合. 关于对数似然函数的一个上界是和全模型对应的值，此值可视为是一衡量的标准. 不仅待比较的模型需依据参数 (可能是经由线性组合再参数化后的参数) 集的子集相互嵌套成一检测链，对联结函数与误差分布也需作同样的处理.

注 8.2.4(残差)　为判断一模型是否足够好，以及何处可改进，我们还可观察 *残差*, 即实际观测值与由模型而得的预估值之间的标准差. 标准化是借助引入方差函数与参数估计而实现的. 自然，我们可以考虑通常的皮尔逊残差；不过，本文偏爱于考虑以观测值对于最大对数似然值的贡献作为基准而得的残差. 对于以恒同函数作为联结函数 的正态分布 而言，标准化的 (皮尔逊) 残差的平方和服从 χ^2 分布， 并和极大似然差成比例. 对于其它的分布，此量则可替换极大似然差用以比较拟合的优劣. ∇

§8.3　若干传统的估计方法与广义线性模型

此节中，我们将阐明在广义线性模型中采用 $I \times J$ 列联表 的想法. 设想，我们通过将因子评级成 I 与 J 个风险类而生成关于诸观测量 Y_{ij} $(i = 1, \cdots, I; j = 1, \cdots, J)$ 的一个表格. 这样，我们便可利用以 i 与 j 索引的 IJ 个相互独立的观测量来替换前一节中表述的以 i 索引的 n 个相互独立的观测量. 高于 2 维的推广是直接的. 每一观测量的附属数据由表中的行数 i 与列数 j 组成. 上述结构适用于许多情形. 譬如，参见 §8.5 中例，行数可以指明某一地区 / 性别组合，列数则可以是汽车的重

量级别或奖惩 系统中的类别. 这样, 观测量 Y_{ij} 便可表示具有特征 i 与 j 的所有司机的已观测到的事故总次数. 另一例子可参见下一章, 那里 i 表示某一保单的签约年, j 表示发展年, 而观测量 Y_{ij} 便表示在日历年 $i+j-1$ 针对附属于年 i 的诸保单而支付的总索赔额. 这样, 此例中日历年 $i+j-1$ 便可视为第三个附属变量. 现我们假设诸观测量 Y_{ij} 的概率分布服从一广义线性模型的假定. 确切地说, 假定它们可视为是一个以 i 与 j 作为解释变量的对数线性模型. 这表明观测量 Y_{ij} 的期望值可表为

$$E[Y_{ij}] = \mu\,\alpha_i\,\beta_j, \quad i=1,\cdots,I, \quad j=1,\cdots,J. \tag{8.1}$$

该模型的参数是 μ, α_i 与 β_j. 至少有两个参数是多余的; 不失一般性, 不妨先假定 $\mu=\beta_1=1$. 稍后, 我们将发现, 若以 $\alpha_1=1$ 替换 $\mu=1$ 也许更方便. 此时, 可把 μ 解释为参照单元 $(i,j)=(1,1)$ 的期望值. 自然, 也可将 (8.1) 式中诸参数的相乘改为相加, 由此即得一可加模型. 不过, 如前所述, 这样的模型不适宜于在精算实务中运用.

注 8.3.1(与对数线性模型的联系) 人们也许会质疑, 怎样解释上述模型 (8.1) 式, 方可使之和广义线性模型 的第 2 个与第 3 个特征相一致. 显然, 若 Y_{ij} 的期望值可表为 $E[Y_{ij}]=\exp(i\log\alpha+j\log\beta+\log\mu)$, 其中 μ, α 与 β 为参数, 便得一个关于 i 与 j 的对数线性模型. 此时, 我们称回归量 i 与 j 为 *变量*(variate), 它们必定是以区间尺度测量的. i 对于线性预估量的贡献具有形式 $i\log\alpha$, 从而参数 α_i 便具有特定的形式: $\alpha_i=\alpha^i$(这里第 1 个 i 是下标, 第 2 个 i 是幂次). 不过, 如 (8.1) 式所示, 变量 i 事实上是用以分类数据的, 它的数值仅起到标签的作用, 故我们称 i 为一 因子. 与因子 i 有关的参数应是任意数值 α_i, $i=1,\cdots,I$. 这样, 为在广义线性模型 的框架内重新表述 (8.1) 式, 亦即把 $E[Y_{ij}]$ 表为附属变量的一个对数线性函数, 对每一观测量, 我们可如下以 I 个 *虚拟变量*$d_1,\cdots,d_I$ 来甄别行数: $d_i=1$ 如该观测量的行数为 i, 否则为零. 于是, 位于行 i 中每一单元对于 (8.1) 式的贡献即可表为对数线性函数的形式 $\exp(\sum_{t=1}^{I} d_t\log\alpha_t)$. ▽

注 8.3.2(以别名称呼) 模型中经常会出现多余的参数. 例如, 当模型中存在常数项和一个因子, 或有多于一个的因子分别为相应的一组虚拟变量替换时, 便属于这样的情形. 为绕开由于模型中存在多余的参数而引发的验证问题, 我们可剔除多余的虚拟变量. 用 GLIM(即广义线性迭代建模) 的术语来说, 这些参数 *以别名被称呼*. 这一现象称为 "多重共线性" 或 "虚拟陷阱". ▽

注 8.3.3(变量间的交互作用) 有时两个因子, 或一个因子与一个变量会 "相互作用". 例如, 当性别与年龄 (类) 取作回归量时, 年龄对男性与女性的影响是不同的. 于是, 可将这两个变量组合成一个新的综合变量用以描述它们的组合效应. 通常称这些新的综合变量为原有变量的 *交互作用*. 如两因子分别具有 I 与 J 个水

平，它们的交互作用便具有 IJ 个水平，详见 §8.5 中例子.　∇

注 8.3.4(观测量的权重)　对于每一单元 (i,j)，除观测量 Y_{ij} 外，另有一权重 w_{ij}. 在精算应用中，关于这些量有若干种不同的解释：

1. Y_{ij} 为平均索赔频率，如 $S_{ij}=Y_{ij}w_{ij}$ 是索赔次数， w_{ij} 是单元 (i,j) 的 **暴露**，即保单在此单元中受保的总年数；

2. Y_{ij} 为平均索赔额，如 S_{ij} 是此单元的索赔总额， w_{ij} 是索赔次数；

3. Y_{ij} 为观测到的净保费，如 S_{ij} 是此单元的索赔总额， w_{ij} 是暴露.

上述任一个解释皆适用于稍后的例子. 以后假定权重 w_{ij} 是一常数，它是可完全精确地予以测定的；但 S_{ij}，从而 Y_{ij} 则为随机变量，它们的可能取值分别以小写字母 s_{ij} 与 y_{ij} 表示.　∇

以下暂令 $\mu=1$. 我们将介绍若干方法用以获得参数 α_i 与 β_j 的估计量 $\hat{\alpha}_i$ 与 $\hat{\beta}_j$，以使得 $\hat{\alpha}_i\hat{\beta}_j\approx y_{ij}$. 这些方法虽在精算实务中经常被用到，但使用者未必都意识到这是一些具有丰富统计底蕴的方法. 对于每一种方法，我们均将给出一个简短的描述，同时附带地指出，对于怎样的广义线性模型 该方法将给出极大似然估计， 或是具有其它性质的估计.

方法 8.3.5(Bailey-Simon 方法 = 关于泊松总体的最小 χ^2 估计)　利用 Bailey-Simon 方法， 可乘模型 中的参数估计量 $\hat{\alpha}_i$ 与 $\hat{\beta}_j$ 由下述解确定：

$$\min_{\alpha_i,\beta_j}\mathrm{BS},\quad 其中\quad \mathrm{BS}=\sum_{i,j}\frac{w_{ij}(y_{ij}-\alpha_i\beta_j)^2}{\alpha_i\beta_j}. \tag{8.2}$$

这一方法之所以受到重视可如下解释：若以 S_{ij} 表示服从泊松分布的索赔次数，则由 (8.2) 表示的 BS 恰是一 χ^2 统计量，这是因为

$$\mathrm{BS}=\sum_{i,j}\frac{(s_{ij}-w_{ij}\alpha_i\beta_j)^2}{w_{ij}\alpha_i\beta_j}=\sum_{i,j}\frac{(s_{ij}-E[S_{ij}])^2}{\mathrm{Var}[S_{ij}]}. \tag{8.3}$$

于是，最小化 BS 无非是确定最小 χ^2 统计量. 模型的假设可简单地予以验证.

现就 (8.2) 中的 BS 针对每一参数求偏导，即得一正规方程组：

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \left(\sum_j\frac{w_{ij}\,y_{ij}^2}{\beta_j}\Big/\sum_j w_{ij}\,\beta_j\right)^{1/2},\quad i=1,\cdots,I;\\ \beta_j &= \left(\sum_i\frac{w_{ij}\,y_{ij}^2}{\alpha_i}\Big/\sum_i w_{ij}\,\alpha_i\right)^{1/2},\quad j=1,\cdots,J.\end{aligned} \tag{8.4}$$

求解上述方程组的迭代法如下所述：首先，选择 β_j 的初值. 譬如，可令 $\beta_j=1$，$j=1,\cdots,J$. 将这些初值代入 (8.4) 中的第一组方程，可得 α_i 的首次估计值. 然

后，再将这些估计值代入第二组方程，即得 β_j 的新值. 重复上述程序，直至参数值近乎不再变化，达到一种平衡. 这一方法称之为 *逐次置换法*. 一般而言， 迭代值会迅速地收敛. 不然，可尝试另一组初值，或利用其它的方法以同时确定所需的最小值. 从多个可能等价的解集中，我们将选择初值 $\beta_1 = 1$ 的那组解. 本节最后给出了一个数值例子 (例 8.3.12). 本质上说，利用逐次置换法 可求出方程 $a = g(a)$ 的一个不动点，其中 a 是参数向量， $g(\cdot)$ 表示 (8.4) 中等号的右端. ∇

注 8.3.6(复合泊松分布) 当索赔总额服从复合泊松分布时，在某些情形也可采用 χ^2 检验. 现以 S_{ij} 表示索赔总额，w_{ij} 表示单元 (i,j) 的总暴露. 再假定由每一受保人导致的索赔次数服从 $\text{Poisson}(\lambda_{ij})$ 分布， 个体索赔额是独立同分布的随机变量，且和 X 同分布. 这表明平均索赔频率是有变化的，但个体索赔额对每一单元都是相同的. 这时我们有

$$E[S_{ij}] = w_{ij}\,\lambda_{ij}\,E[X], \qquad \text{Var}[S_{ij}] = w_{ij}\,\lambda_{ij}\,E[X^2], \tag{8.5}$$

再因 $E[Y_{ij}] = \alpha_i\beta_j$ 从而便有

$$\text{Var}[Y_{ij}] = \frac{\alpha_i\beta_j}{w_{ij}}\frac{E[X^2]}{E[X]}. \tag{8.6}$$

于是， BS 便是具有零均值、常值方差的随机变量的平方和. 实际上，仅需比例 $E[X^2]/E[X]$ 对每一单元都是相同的，上述结论也成立. 若我们以这一因子校正 BS, 且由估计程序产生的是最优渐近正态 (BAN) 估计量 (譬如，由极大似然法便可获得这样的估计量), 我们即得一自由度为 $(I-1)(J-1)$ 的渐近 χ^2 分布. 不过，若 Y_{ij} 表示观测到的净保费，即使个体索赔额是独立同分布的随机变量，且以 $E[X^2]/E[X]$ 除 BS 而将 BS 标准化，上述结论也未必成立. ∇

性质 8.3.7(Bailey-Simon 方法导致 "安全保费") 对精算师来说，Bailey-Simon 方法有一性质是很有吸引力的. 可以证明，利用这一方法所得保费总额要较观测到的损失总额多. 事实上甚至可进一步证明，若按行或按列累计保费与损失，相应的结论也成立. 确切地说，若以 $\hat{\alpha}_i$ 与 $\hat{\beta}_j$ 表示 (8.4) 的解，则有

$$\sum_{i(j)} w_{ij}\,\hat{\alpha}_i\,\hat{\beta}_j \geqslant \sum_{i(j)} w_{ij}\,y_{ij}, \quad \forall\, j(i). \tag{8.7}$$

为证明 (8.7), 首先可将 (8.4) 中的第一组方程改写为

$$\hat{\alpha}_i^2 = \sum_j \frac{w_{ij}\,\hat{\beta}_j}{\sum_h w_{ih}\,\hat{\beta}_h}\frac{y_{ij}^2}{\hat{\beta}_j^2}, \quad i = 1,2,\cdots,I. \tag{8.8}$$

显然，上式恰为一随机变量 U 的二阶矩 $E[U^2]$, 如其分布为 $\Pr[U = d_j] = p_j$, 其中

$$p_j = \frac{w_{ij}\hat{\beta}_j}{\sum_h w_{ih}\hat{\beta}_h}, \quad d_j = \frac{y_{ij}}{\hat{\beta}_j}. \tag{8.9}$$

再因对任一随机变量 U, 恒有 $E[U^2] \geqslant (E[U])^2$, 立知

$$\hat{\alpha}_i \geqslant \sum_j \frac{w_{ij}}{\sum_h w_{ih}\hat{\beta}_h} y_{ij},$$

因此

$$\sum_j w_{ij}\,\hat{\alpha}_i\,\hat{\beta}_j \geqslant \sum_j w_{ij}\,y_{ij}. \tag{8.10}$$

类似地可证明，估计的列和至少也等于观测到的列和. ∇

方法 8.3.8(边缘总和法)　*寓于边缘总和法的基本想法是和寓于精算等价原理的基本思想一致的：在一个“良好”的收费系统内，对于一个拥有众多被保险人的组合来说，保费总额相等于观测到的损失总额.* 我们可如此确定 $\hat{\alpha}_i$ 与 $\hat{\beta}_j$ 的值，使得上述条件对所有这样的风险组合成立，即对这些风险组合而言，风险因子之一，行数 i 或列数 j 是常数. 等价性未必对每一单元成立，但在行或列的较高层次的合成水平上，等价性是成立的.

在可乘模型中，为估计参数我们需解下述含 $I+J$ 个未知数，且由 $I+J$ 个方程组成的方程组：

$$\sum_{i(j)} w_{ij}\,\alpha_i\,\beta_j = \sum_{i(j)} w_{ij}\,y_{ij}, \quad \forall j(i). \tag{8.11}$$

若所有估计的与观察到的行和均相等，则所有这些行和之和也必相等. 这表明所有观测值的总和等于所有估计值的总和. 于是，方程组 (8.11) 中有一个方程是多余的，因方程组中的每一方程皆可表为其余所有方程的线性组合. 这一结论是和下述事实相符的：即 (8.11) 中的 α_i 与 β_j 仅能决定到相差一个可乘常数.

解方程组 (8.11) 的方法之一是从关于 β_j 的任意正初值开始，采用逐次置换法解之. 为此可将该方程组改写成下述形式：

$$\alpha_i = \sum_j w_{ij}\,y_{ij} \Big/ \sum_j w_{ij}\,\beta_j, \quad i=1,\cdots,I;$$

$$\beta_j = \sum_i w_{ij}\,y_{ij} \Big/ \sum_i w_{ij}\,\alpha_i, \quad j=1,\cdots,J. \tag{8.12}$$

一般而言，通过为数不多的几次迭代即可获得一组理想的估计值. ∇

边缘总和法的启示验证适用于 Y_{ij} 的每一种解释. 不过，若 Y_{ij} 表示索赔数，则有如下述性质所示的另一种解释.

性质 8.3.9(对数线性泊松的 GLM= 边缘总和法)　假设位于单元 (i,j) 中的被保险人共有 w_{ij} 位，其中每一人引发的索赔次数皆服从 Poisson(λ_{ij}) 分布；再假定 $\lambda_{ij}=\alpha_i\beta_j$, 则由极大似然法与边缘总和法给出的 α_i 与 β_j 的估计值是相同的.

证明 因为位于单元 (i,j) 的索赔总数服从 Poisson$(w_{ij}\lambda_{ij})$ 分布，故以 s_{ij} 为观察到的索赔总数的诸参数 λ_{ij} 的极大似然函数可表为

$$L=\prod_{i,j}e^{-w_{ij}\lambda_{ij}}\frac{(w_{ij}\lambda_{ij})^{s_{ij}}}{s_{ij}!}. \tag{8.13}$$

若将下述关系式代入上式：

$$E[Y_{ij}]=E[S_{ij}]/w_{ij}=\lambda_{ij}=\alpha_i\beta_j, \tag{8.14}$$

并针对 α_i 与 β_j 求其最大值，则恰可导出方程组 (8.11). ▽

方法 8.3.10(最小二乘法 = 关于正态的极大似然法) 在最小二乘法中，估计量是如此确定的：它们应使得观测到的损失额与估计的保费之差的加权平方和最小，权重可取成每单元的暴露. 引入权数之所以必要，是为了保证诸相加的数在数值大小上是同阶的. 如 Y_{ij} 的方差与 $1/w_{ij}$ 成比例 (譬如，当 S_{ij} 为 w_{ij} 个具有相同方差的独立同分布的随机变量之和时，便满足这一要求), 下述 (8.15) 中诸项具有相同的均值，因此将它们相加是有意义的. 参数 α_i 与 β_j 的估计量由下述解确定：

$$\min_{\alpha_i,\beta_j}\text{SS},\quad 其中\quad \text{SS}=\sum_{i,j}w_{ij}(y_{ij}-\alpha_i\beta_j)^2. \tag{8.15}$$

就上式中的 SS 针对每一参数求偏导，可得一正规方程组，我们将其写成一种适合于逐次置换的形式：

$$\alpha_i=\sum_j w_{ij}\,y_{ij}\,\beta_j\Big/\sum_j w_{ij}\,\beta_j^2,\quad i=1,\cdots,I;$$

$$\beta_j=\sum_i w_{ij}\,y_{ij}\,\alpha_i\Big/\sum_i w_{ij}\,\alpha_i^2,\quad j=1,\cdots,J. \tag{8.16}$$

鉴于正态分布似然函数的特定形式，不难证明，SS 的最小化恰等价于正态分布对数似然函数的最大化 (见习题 §8.3 第 7 题). ▽

方法 8.3.11(直接法 = 关于伽玛分布的极大似然法) 直接法通过求解下述方程组而确定关于参数 α_i 和 β_j 的估计量：

$$\alpha_i=\sum_j w_{ij}\frac{y_{ij}}{\beta_j}\Big/\sum_j w_{ij},\quad i=1,\cdots,I;$$

$$\beta_j=\sum_i w_{ij}\frac{y_{ij}}{\alpha_i}\Big/\sum_i w_{ij},\quad j=1,\cdots,J. \tag{8.17}$$

上述方程组可以借助逐次置换法求解. 关于这一方法的验证可如下解释之. 假设我们已知诸乘子 $\beta_j, j=1,\cdots,J,$ 的正确值，则随机变量 Y_{ij}/β_j 的均值为 α_i. 这样，

若以加权平均估计 α_i, 即得 (8.17) 式中的第一组方程. 同样的论证适用于 Y_{ij}/α_i, 从而可得 β_j 的估计量. 进一步可参见习题 §8.3 第 4 题.

在一类特定的 GLM 中, 直接法恰等同于极大似然法. 现设 $S_{ij} \sim \Gamma(\gamma w_{ij}, \frac{\gamma}{\alpha_i \beta_j})$. 这表明, S_{ij} 可视为 w_{ij} 个相互独立, 其变异系数为 $\gamma^{-1/2}$, 均值为 $\alpha_i \beta_j$ 的 $\Gamma(\gamma, \frac{\gamma}{\alpha_i \beta_j})$ 随机变量之和. 以下我们将证明, 此时利用直接法即可求出极大似然估计量. 首先, 与单元 (i, j) 相对应的观测量的极大似然函数可表为

$$f_{S_{ij}}(s_{ij}; \alpha_i, \beta_j) = \frac{1}{\Gamma(\gamma w_{ij})} \left(\frac{\gamma}{\alpha_i \beta_j}\right)^{\gamma w_{ij}} s_{ij}^{\gamma w_{ij}-1} e^{\frac{-\gamma s_{ij}}{\alpha_i \beta_j}}. \tag{8.18}$$

这样, 对于 $L = \prod_{i,j} f_{S_{ij}}(s_{ij}; \alpha_i, \beta_j)$, 借助对 α_k 求偏导即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \alpha_k} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \sum_{i,j} \left\{ \gamma w_{ij} \log \frac{\gamma}{\alpha_i \beta_j} - \frac{\gamma s_{ij}}{\alpha_i \beta_j} \right\} + 0 \\ &= \sum_j \left\{ \frac{-\gamma w_{kj}}{\alpha_k} + \frac{\gamma s_{kj}}{\alpha_k^2 \beta_j} \right\}. \end{aligned} \tag{8.19}$$

对 β_h 求偏导可得类似的方程. 若置源自于极大似然法的正规方程组 (8.19) 为零, 稍经一些代数运算, 恰可化为直接法的方程组 (8.17). ▽

例 8.3.12(上述诸方法的数值说明)　我们将上述 4 种方法运用于下表中的数据, 数据的形式为 $w_{ij} \times y_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	300×10	500×15
$i = 2$	700×20	100×35

下述拟合值 $\hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j$ 是依据不同的方法求得的.

Bailey-Simon 法		缘总和法		最小二乘法		直接法	
9.40	15.38	9.39	15.37	9.04	15.34	9.69	15.29
20.27	33.18	20.26	33.17	20.18	34.24	20.27	31.97
$\Delta = 28.85$		$\Delta = 28.86$		$\Delta = 37.06$		$\Delta = 36.84$	

上述 $\Delta = \sum_{i,j} w_{ij}(y_{ij} - \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j)^2/(\hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j)$ 刻画了拟合的优劣程度. 显然, 最小值对应于 Bailey-Simon 法. 确定 $\hat{\alpha}_i$ 与 $\hat{\beta}_j$ 的方程组是相似的, 但不恒同. 由各种方法算得的结果是十分接近的. 我们建议读者试算以上所需的最优化方法, 或仅仅核实一下表中给出的答案是否满足相应的最优化方程, 从而验证所得的解是否正确. ▽

这一章中，我们强调逐次置换法，这是因为一旦方程组写成合适的形式，此法具有执行简单的便利之处. 自然，很多其它的算法也可用于求解似然函数的极大值.

§8.4　偏差与比例偏差

作为拟合值向量与观测值向量间差异的度量，人们一般会考虑它们的欧氏距离，即差的平方和. 如观测值是采自于正态分布的，则最小化这一距离与最大化参数值的极大似然函数这两者是等效的. 在广义线性模型的分析中，人们通常会注意特定模型的“最优”似然函数与最大可能似然函数之间的差异，这一最大可能似然函数是在不对参数赋予任何结构，即在 *全模型* 的条件下得到的.

一个模型的 *比例偏差* 定义为这样一个似然比对数的 -2 倍，该似然比等于以特定模型的极大似然函数除以最大可能似然函数所得之商，而 *偏差* 则定义为比例偏差与散布参数 ϕ 的乘积. 由数理统计理论知，比例偏差近似地服从这样一种 χ^2 分布，其自由度等于观测量的总数减去待估参数的总数所得之差. 自然，若一模型是另一模型的子模型，则还知它们的比例偏差之差也近似地服从 χ^2 分布.

针对在一个 GLM 中围绕均值的随机变异分布的三种适当的选择，我们将给出偏差的表示式. 以下恒假定观测量 $Y_i, i=1,\cdots,n$, 的期望值 μ_i 服从一个特定的模型，譬如前一节中提及的关于行与列的可乘模型. 再以 $\hat{\mu}_i$ 表示这一模型均值的最优估计，而以 $\tilde{\mu}_i$ 表示关于全模型均值的最优估计. 在全模型中，每一观测量具有它自己的参数，从而总似然函数的最大化可以逐项相求. 现进一步假定第 i 个观测量是 w_i 个独立同分布观测量的算术平均. 再假定这些观测量具有相同的散布参数 ϕ. 我们已提及这一散布参数是和方差成比例的，而方差作为均值的函数则可表为 $\phi V(\mu)/w$, 其中 $V(\cdot)$ 是方差函数.

例 8.4.1(正态分布)　假设 $Y_1,\cdots,Y_n$ 是相互独立的正态随机变量，其中 Y_i 是 w_i 个相互独立且服从 $N(\mu_i,\phi)$ 分布的随机变量的平均，于是 $Y_i\sim N(\mu_i,\phi/w_i)$. 现记 L 为关于上述诸观测量参数的似然函数. 再记 $\hat{L}$ 和 $\tilde{L}$ 分别表示在 L 中当以 $\hat{\mu}_i$ 和 $\tilde{\mu}_i$ 置换 μ_i 后所得之值. 我们有

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\phi/w_i}}\exp\left(\frac{-(y_i-\mu_i)^2}{2\phi/w_i}\right). \tag{8.20}$$

显然，对全模型而言，借助逐项最大化 (8.20) 即知，对每一 i 皆有 $\mu_i=\tilde{\mu}_i=y_i$. 如以 D 表示偏差便得

$$\frac{D}{\phi}=-2\log\frac{\hat{L}}{\tilde{L}}=\frac{1}{\phi}\sum_i w_i(\hat{\mu}_i-y_i)^2. \tag{8.21}$$

这表明，对正态分布 而言，最小化偏差 (或等价地最大化似然函数) 是和确定参数的最小二乘法等效的. ∇

例 8.4.2(泊松样本均值)　现令 $Y_i = \phi M_i/w_i$, 其中 $M_i \sim \text{Poisson}(w_i\mu_i/\phi)$. 以下简记 $Y_i \sim$Poisson(μ_i, ϕ). 特别地，当 $w_i \equiv 1$ 且 $\phi = 1$ 时，即化为通常的泊松随机变量. 如 w_i/ϕ 为一整数， Y_i 便可视为 w_i/ϕ 个相互独立的 Poisson(μ_i) 随机变量之和. 不过，没有这一限定，上述模型仍是合理有效的，其似然函数可表述于下：

$$
\begin{aligned}
&L(\mu_1, \cdots, \mu_n;\ \phi, w_1, \cdots, w_n, y_1, \cdots, y_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \Pr[w_iY_i/\phi = w_iy_i/\phi] = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\mu_i w_i/\phi}(\mu_i w_i/\phi)^{w_i y_i/\phi}}{(w_i y_i/\phi)!}.
\end{aligned} \tag{8.22}
$$

不难证明，若 μ_i 的值使 $e^{-\mu_i}\mu_i^{y_i}$ 取到最大值，也必使上式中的第 i 项取到最大值. 显然，使前式取到最大值的 $\mu_i = y_i$. 于是，恰如正态分布的情形，仅需使第 i 项残差为零，即可求得 $\tilde{\mu}_i$. 事实上，对指数散布族 的任一成员，这一结论也成立. 详见例 8.4.1, 例 8.4.3 以及习题 §8.6 第 5 题.

不难验证，此例中的偏差由下式给出：

$$
\frac{D}{\phi} = -2\log\frac{\hat{L}}{\tilde{L}} = \frac{2}{\phi}\sum_i w_i\left(y_i\log\frac{y_i}{\hat{\mu}_i} - (y_i - \hat{\mu}_i)\right). \tag{8.23}
$$

注意到 $E[Y_i] = \mu_i$, $\text{Var}[Y_i] = \frac{\phi}{w_i}\mu_i$, 即知 $V(\mu) = \mu$.

为说明引入权重的必要性，可以考虑单元中的司机具有 w_i 张保单，且要对其平均索赔频率建模的情形. 这时如不考虑权重，人们便会忽视这样的事实：与那些近乎是空单元中的观测量相比，在具有多张保单的单元中，观测量将以高得多的精度被测量.

通过改变散布参数 ϕ, 我们可得到方差不等于均值，但仍和其成比例的分布，此时通常称其为 *超散布* 泊松分布.　此例中随机变量 Y_i 的支撑集由 ϕ/w_i 的整数倍值组成. 不过，比例偏差 (8.23) 显然允许对 y_i 的其它非负值取最小化，如此即得 *拟极大似然模型*. ∇

例 8.4.3(伽玛分布)　现假设 $Y_i \sim \Gamma(w_i/\phi, w_i/\{\phi\mu_i\})$, 显然， Y_i 与 w_i 个相互独立的 $\Gamma(1/\phi, 1/\{\phi\mu_i\})$ 随机变量的算术平均同分布，或等价地，与 w_i/ϕ 个相互独立且服从 $\text{Exp}(1/\mu_i)$ 分布的随机变量的算术平均同分布. 我们有

$$
E[Y_i] = \mu_i, \quad \text{Var}[Y_i] = \frac{\phi}{w_i}V(\mu_i) = \frac{\phi}{w_i}\mu_i^2. \tag{8.24}
$$

此时，对全模型仍可得 $\tilde{\mu}_i = y_i$, 这是因为

$$
\frac{d}{d\mu}\log f_Y\left(y; \frac{w}{\phi}, \frac{w}{\phi\,\mu}\right) = \frac{d}{d\mu}\log\left(\frac{1}{\Gamma(w/\phi)}\left[\frac{w}{\phi\,\mu}\right]^{w/\phi} y^{w/\phi-1}e^{-wy/(\phi\,\mu)}\right)
$$

$$= \frac{d}{d\mu}\left(\frac{w}{\phi}\log\frac{w}{\phi\mu}+\left(\frac{w}{\phi}-1\right)\log y-\frac{wy}{\phi\mu}\right)$$

$$= \frac{-w}{\phi\mu}+\frac{wy}{\phi\mu^2}=0 \quad \text{当且仅当} \quad y=\mu. \tag{8.25}$$

不难验证，此例中的偏差由下式给出：

$$\frac{D}{\phi}=-2\log\frac{\hat{L}}{\tilde{L}}=\frac{2}{\phi}\sum_i w_i\left(-\log\frac{y_i}{\hat{\mu}_i}+\frac{y_i-\hat{\mu}_i}{\hat{\mu}_i}\right). \tag{8.26}$$

自然，上式中 y_i 必须取正值. ∇

单凭数据即可计算偏差 D. 它是一统计量，不含任何未知参数. 注意，对于上述三类分布中的任一类分布来说，由对 μ_i 的最大化所导出的结果皆和散布参数 ϕ 无关；与 ϕ 有关的仅是联系于每一观测量的参数的相对值 ϕ/w_i. 于是，ϕ 的估计完全可以不顾及 μ_i 的最优值是如何确定的. 为估计 ϕ 的值，通常可如下进行. 在 $Y_i \sim N(\mu_i, \phi/w_i)$ 的零假设下，由 (8.21) 式给出的最小化的平方和恰服从这样的 χ^2 分布，其自由度 df 等于观测量的总数减去为计算 $\hat{\mu}_i$ 所需的参数估计的总数后所得之差. 这样，便可借助矩法来估计 ϕ, 即令 (8.21) 式等于其均值 (即自由度)df, 然后再求出 ϕ 的估计值. 基于模型过于粗糙，便需保证观测量 Y_i 与其拟合值间的差异不是由系统偏差，而是由偶然因素引发的. 这样，ϕ 的估计应在这样的模型中进行：即在仍能估计的范围内，此模型是最精细的；尽管一般来说，该模型中会含有很多的参数. 所以，对这一模型来说，比例偏差等于自由度 df 的值. 估计 ϕ 的另一种可能性是利用极大似然法.

散布参数 ϕ 的解释对于每一分布类是不同的. 对于正态分布来说，它恰为误差的方差. 对于纯泊松分布而言，$\phi=1$; 对于超散布泊松分布来说，它等于方差与均值之比，也等于与所有泊松随机变量相乘的因子. 对于伽玛分布来说，$\sqrt{\phi}$ 表示关于个体观测量的变异系数 σ/μ.

§ 8.5 列联表分析

此节中我们分析由计算机产生的人为数据集，它表示 14 742 人因某种疾病而住院的天数. 这些人因病住院的总天数为 58 607 天，详见表 8.1. 数据可根据特征 j 分类，该特征如下表示不同的地区 / 性别组合： j 的奇数值表示女性；与之同时，$j=1,2$ 表示区域 Ⅰ, $j=3,4$ 表示区域 Ⅱ, $j=5,6$ 表示区域 Ⅲ. 再另以特征 i 对年龄进行编组：组 $i=1$ 表示年龄介于 15~25 之间的人群，$i=2$ 表示年龄为 25~35 的人群，以此类推，最后一组 $i=6$ 表示 65 岁或更高年龄的人群. 我们尝试以一可乘模型 $\mu\alpha_i\beta_j$ 来预测住院的天数，其中 μ 表示单元 (1,1) 中的期望值，从而 $\alpha_1=\beta_1=1$. 现假定观测量服从围绕这一均值的泊松分布. 依据 GLM 的拟

表 8.1　观察到的平均住院天数 y_{ij}，观测次数 w_{ij}，以及按模型 Ⅰ、Ⅳ 和 Ⅹ 算得的拟合值．观测值是根据地区/性别组合和年龄级别进行分类的

		$j=1$ F，Ⅰ	$j=2$ M，Ⅰ	$j=3$ F，Ⅱ	$j=4$ M，Ⅱ	$j=5$ F，Ⅲ	$j=6$ M，Ⅲ
1	y_{ij}	4.10	3.50	3.20	2.80	3.70	3.00
15~25	w_{ij}	525.	547.	508.	481.	524.	514.
Ⅰ	fv_1	3.96	3.81	2.95	2.87	3.41	3.28
Ⅳ	fv_2	4.04	3.88	3.01	2.93	3.47	3.35
Ⅹ	fv_3	4.22	3.57	3.24	2.85	3.71	3.13
2	y_{ij}	4.40	4.00	3.40	3.00	3.80	3.50
25~35	w_{ij}	487.	478.	508.	490.	407.	435.
Ⅰ	fv_1	4.32	4.16	3.22	3.13	3.71	3.57
Ⅳ	fv_2	4.30	4.14	3.21	3.13	3.70	3.57
Ⅹ	fv_3	4.41	3.94	3.34	3.07	3.84	3.43
3	y_{ij}	5.00	4.50	3.70	3.50	4.00	3.90
35~45	w_{ij}	411.	414.	415.	484.	469.	523.
Ⅰ	fv_1	4.80	4.62	3.58	3.48	4.12	3.97
Ⅳ	fv_2	4.58	4.41	3.42	3.33	3.94	3.80
Ⅹ	fv_3	4.61	4.36	3.45	3.32	3.97	3.76
4	y_{ij}	4.70	4.70	3.10	3.60	4.20	4.20
45~55	w_{ij}	395.	448.	413.	416.	389.	419.
Ⅰ	fv_1	4.79	4.61	3.57	3.47	4.11	3.96
Ⅳ	fv_2	4.88	4.70	3.64	3.55	4.20	4.05
Ⅹ	fv_3	4.82	4.81	3.56	3.58	4.12	4.12
5	y_{ij}	4.90	5.30	3.80	3.80	4.20	4.40
55~65	w_{ij}	372.	368.	355.	339.	378.	445.
Ⅰ	fv_1	5.16	4.97	3.85	3.74	4.43	4.27
Ⅳ	fv_2	5.21	5.01	3.88	3.78	4.48	4.32
Ⅹ	fv_3	5.04	5.32	3.67	3.86	4.26	4.52
6	y_{ij}	5.30	5.90	3.90	4.10	4.40	4.90
65+	w_{ij}	265.	240.	233.	233.	210.	205.
Ⅰ	fv_1	5.56	5.35	4.15	4.03	4.78	4.61
Ⅳ	fv_2	5.55	5.34	4.14	4.03	4.77	4.60
Ⅹ	fv_3	5.27	5.88	3.78	4.17	4.41	4.95

合程序，我们可设置若干种特定的模式，既可令 α_i 与 β_j 是任意的，也可令 $\alpha_i \equiv 1$ 或 $\beta_j \equiv 1$. 还可令 α_i 遵循关于某一数值 α 的几何模式，即 $\alpha_i = \alpha^{i-1}$. 这一假设对于 β_j 的意义不大，该假设仅当因子是以 "区间尺度" 测量时方有意义. 若按此意义理解， $j=5$ 与 $j=4$ 之间的差别是和 $j=4$ 与 $j=3$, 或 $j=2$ 与 $j=1$ 之间的差别一样的，但此处分类 $j=1,\cdots,6$ 甚至不具有序数的意义. 若取 $\alpha_i \equiv 1$, 相应的模型表示年龄对于住院的模式没有任何影响；而选择 $\alpha_i = \alpha^{i-1}$ 则表示随着年龄的增长，住院的平均天数以一固定的因子增加或减少. 有关所用的各种模型及其性能的概貌，可参见表 8.2.

表 8.2 运用于表 8.1 中数据的各种模型的参数，自由度与比例偏差

模型	e^η 中的因子	自由度	比例偏差
I	$\mu\,\alpha_i\,\beta_j$	25	52.6
II	$\mu\,\alpha_i\,\beta^{j-1}$	29	233.
III	$\mu\,\alpha_i$	30	321.
IV	$\mu\,\alpha^{i-1}\,\beta_j$	29	62.8
V	$\mu\,\alpha^{i-1}\,\beta^{j-1}$	33	242.
VI	$\mu\,\alpha^{i-1}$	34	329.
VII	$\mu\,\beta_j$	30	268.
VIII	$\mu\,\beta^{j-1}$	34	450.
IX	μ	35	536.
X	$\mu\,\alpha_j^{i-1}\,\beta_j$	24	24.0

比较模型 I ～ III 与 IV ～ VI 即可发现，在后三个模型中对年龄级别假定了几何进展. 若以拟合值与观测值之间的距离来仲裁，拟合结果的可比性是十分明显的. 当以 β^{j-1} 或 1 来置换 β_j, 后，拟合结果将变得很差. 由此可断言，这一变量必将以其最复杂的形式作为一个因子存在于此模型中. 表 8.1 中列有关于模型 I $(\mu\,\alpha_i\,\beta_j)$ 和 IV $(\mu\,\alpha^{i-1}\,\beta_j)$ 的拟合值. 关于模型 IV 的预估值可如下计算：

$$\text{IV:}\quad \hat{y}_{ij} = \hat{\mu}\,\hat{\alpha}^{i-1}\,\hat{\beta}_j = 4.036 \times 1.066^{i-1} \times \begin{bmatrix} j=1:1.000 \\ j=2:0.962 \\ j=3:0.746 \\ j=4:0.727 \\ j=5:0.860 \\ j=6:0.830 \end{bmatrix}. \tag{8.27}$$

在迄今为止考虑的模型中，拟合值皆是作为两种主要效应，即行效应与列效应的乘积而确定的. 一般说来，有理由认为这些效应并不是相互独立地运作的，在它们

之间会存在 *交互作用*. 这表明，对每一列而言，有可能存在不同的行效应. 这样，期望值即可表为一个很一般的形式 $E[Y_{ij}] = \delta_{ij}$. 在我们的例子中，通过制表将关于单元 (i,j) 的所有观测量组合成一个，这样便得到一个全模型：每一观测单元具有一参数，而每一参数具有一指定精度 w_{ij}. 不过，我们也可如此处理模型：让每一地区 / 性别组合具有它自己的几何进展，由此即得模型 X. 关于此模型我们有 $E[Y_{ij}] = \mu\,\alpha_j^{i-1}\,\beta_j$. 尽管不是所有其它的模型都可和其相嵌套，这一模型仍是我们要估计的最精细的模型. 我们要确定模型 X 中联结偏差与比例偏差 的比例因子 ϕ 的估计值，比例偏差 可视为模型中每一自由度的平均偏差，这给出 $\hat{\phi} = 3.088$ 的超散布情形. 于是，表 8.2 中的距离可用这样一种方式比例化，以使得模型 X 具有一个自由度为 24 的距离 24. 该模型具有 36 个观测量， 12 个待估的参数，这是因为对于每一地区 / 性别组合，皆存在一个 (关于年龄级别 15~25 的) 初始水平与一个递增因子. 关于模型 X 的估计值可如下计算：

$$\mathbf{X}:\quad \hat{y}_{ij} = (\hat{\mu}\,\hat{\beta}_j)(\hat{\alpha}_j)^{i-1} = \begin{bmatrix} j=1: 4.218 \times 1.046^{i-1} \\ j=2: 3.567 \times 1.105^{i-1} \\ j=3: 3.240 \times 1.031^{i-1} \\ j=4: 2.848 \times 1.079^{i-1} \\ j=5: 3.706 \times 1.036^{i-1} \\ j=6: 3.133 \times 1.096^{i-1} \end{bmatrix}. \tag{8.28}$$

比较表 8.2 中的数据可以发现，模型Ⅳ可以嵌入于模型 I 中， 前者的参数要比后者少 4 个，而比例偏差却大 10.2. 为检验这一差异是否显著，我们注意到在零假设下，此两模型比例偏差 之差近似地服从自由度为 4 的 χ^2 分布. 由于 $\chi^2(4)$ 分布的 95% 的临界值为 9.5, 因此可以认为模型 I 要优于模型Ⅳ. 在行和列之间不存在交互作用的模型中，模型Ⅳ是最好的，这是因为其它所有更为粗糙模型的比例偏差要显著地大于模型Ⅳ的比例偏差. 如前所述，更为精细的模型 I 要显著地优于模型Ⅳ，尽管是以一个较小的距离上的赢利. 此外，当从模型Ⅳ转换至模型 X 时，要涉及取消条件 $\alpha_j \equiv \alpha$, 这样的转换导致统计检验上更为满意的显著性，同时也导致拟合有实际意义的改进. 它仅以 5 个附加的参数，在距离上便达到了 38.8 的赢利.

j 的偶数值表明观测量是和男性有关的. 只须检查 (8.27) 式中关于 $j = 2k-1$ 和 $j = 2k$ 的系数 $\hat{\beta}_j$ 即可发现，对于同一年龄级别的人群而言，男性住院天数要比女性少 3% 左右. 地区效应表现得更强一些. 若无视性别，区域Ⅱ是区域 I 的 75% 左右，区域Ⅲ则为 85% 左右. 显见，如引入三个主要效应：年龄差别 (几何式地)，性别和地区，且不计后两效应的交互效应，则会得到一个较Ⅳ更好的模型.

注意前述理论仅是针对两个外生变量给出的. 此节的例中虽有三个变量，但替之于分别地考虑性别与地区，我们通过构造一个分类变量借以区分针对每一性别 /

地区组合所得的子类，从而便可考察这两个变量的交互作用. 自然，也很容易将理论推广到多于两个回归量的情形.

§ 8.6 广义线性模型的随机分量

如许多教材所示，引入广义线性模型 的一种可能途径是以定义指数散布族 的密度作为出发点，这一密度包含了前面介绍的所有例子. 其次，以这一般的密度公式出发，可以推导它的一些性质，包括导出它的均值与方差. 然后，将推导确定此密度族的极大似然估计的算法. 这一算法适用于任意的联结函数. 鉴于该密度的一般公式仅对于推导这一万能的算法是本质的，而对 GLM 的偶然用户并不会提供任何帮助，故我们把它的介绍延迟到这一节，有意让读者一开始先绕过这一概念. 此外，这一节中我们还将研究所谓的典则联结函数， 它有若干很良好的性质；最后将给出 Welder 与 Wedderburn 算法的一个简短的描述.

指数散布族

§8.2 通过列举一些重要的例子，介绍了在 GLM 中可能用于描述随机性的分布. 以下我们将给出在 GLM 中可能采用的密度族的更为一般的定义. 可以指出，前面已提及的所有例子，正态、 泊松、 泊松乘数、 伽玛、 逆高斯 和二项分布皆为下述密度族的特例.

定义 8.6.1(指数散布族) 指数散布族 密度具有以下形式

$$f_Y(y;\theta,\psi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{\psi} + c(y;\psi)\right), \quad y \in D_\psi. \tag{8.29}$$

上述 ψ 和 θ 是实参数， $b(\cdot)$ 和 $c(\cdot;\cdot)$ 是实函数，密度的支撑集 $D_\psi \subset \Re$. ∇

参数 θ 的作用与 ψ 不同，因 ψ 不影响均值的取值，而均值却正是我们最感兴趣的. 我们在前面一些节中描述的线性模型仅是以解释这一均值作为宗旨的. 尽管除个别特殊情形外， ψ 的值是固定，但也是未知的，在 GLM 的文献中仍习惯地把上述密度族称为单参数指数族. 函数 $b(\cdot)$ 称为是累积量函数， 详见后述. 支撑集 D_ψ 与 θ 无关，函数 $c(\cdot;\cdot)$ 也是，它是作为规范化函数出现的，用以保证密度的求和或积分恰等于 1. 就一些重要的连续型分布来说，正态分布 的支撑集是 $\Re$, 伽玛与逆高斯分布 的支撑集皆为 $(0,\infty)$. 在离散情形，支撑集为可数集. 例如，对泊松乘数 分布来说， $D_\psi = \{0,\psi,2\psi,\cdots\}$. 以下将列出一些指数散布族 成员的例子，关于函数 $b(\cdot)$ 和支撑集 D_ψ 的具体形式，可参见表 E 作为练习，要求读者验证该表中的诸项.

例 8.6.2(指数散布族的若干成员) 下述参数族是指数散布族 中最重要的一些成员：

1. 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 经参数化后, 有 $\theta(\mu,\sigma^2)=\mu$ 与 $\psi(\mu,\sigma^2)=\sigma^2$ (注意, 因此处的 μ 表示均值, θ 便不依赖于 σ^2).

2. 泊松分布 Poisson(μ), 此时参数 $\theta=\log\mu$, 而 $\psi=1$.

3. 二项分布 $B(m,p)$, 其中 m 是任意固定且已知的自然数, 相应地有 $\theta=\log\frac{p}{1-p}$ 与 $\psi=1$.

4. 负二项分布 NB(r,p), 其中 r 是任意固定且已知的正实数, 相应地有 $\theta=\log(1-p)$ 与 $\psi=1$.

5. 伽玛分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$, 经参数化后, 有 $\theta(\alpha,\beta)=-\beta/\alpha$, $\psi(\alpha,\beta)=1/\alpha$. 注意, 此时 $\theta<0$ 必成立.

6. 逆高斯分布 IG(α,β), 此时 $\theta(\alpha,\beta)=-\frac{1}{2}\beta^2/\alpha^2$, $\psi(\alpha,\beta)=\beta/\alpha^2$, 且也必然有 $\theta<0$. ∇

注意, 有三种不同的参数化形式: 贯穿全书的 "标准" 参数化, 已在 §8.2 中证实是方便的由均值 μ 和散布参数 ψ 表示的参数化, 以及本节中采用的由 θ 和 ψ 表示的参数化. 最后一种参数化称为是自然或典则参数化, 这是因为由 (8.29) 式表述的密度中的因子涉及自变量 y 与参数 θ, 这确定了均值具有特定的形式 $y\theta$ 而非针对某一函数 $h(\cdot)$ 表述的 $yh(\theta)$.

例 8.6.3(伽玛分布与指数散布族) 作为例子, 我们将说明伽玛分布 是如何与指数散布族 相匹配的. 常见的, 也是本书其余部分采用的参数化是借助形状参数 α 和刻度参数 β 来表述的. 为确定 ψ 和 θ, 我们可将 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 密度函数的对数与 (8.29) 进行比较, 由此可得

$$-\log\Gamma(\alpha)+\alpha\log\beta+(\alpha-1)\log y-\beta y=\frac{y\theta-b(\theta)}{\psi}+c(y;\psi). \tag{8.30}$$

必须如此选择参数, 以使得 θ, ψ 与 y 在对数密度中一起仅出现在形如 $\theta y/\psi$ 的这一项中. 为此首先可令 $\psi=\frac{1}{\alpha}$, $\theta=-\frac{\beta}{\alpha}$. 注意, 此时我们有 $\theta<0$. 其次, 为使得 (8.30) 式的左端与右端相符, 可进一步令 $b(\theta)=-\log(-\theta)$. 这样, 最后仅留 $c(y;\psi)=\alpha\log\alpha+(\alpha-1)\log y-\log\Gamma(\alpha)$ 这一项不包含 θ. 在 μ,ψ 参数化中, μ 是作为均值出现的, 故有 $\mu=\frac{\alpha}{\beta}$. 由此即可推断, 在 θ,ψ 的参数化中, 这些随机变量的均值是和 ψ 无关的, 这是因为

$$E[Y;\theta]=:\mu(\theta)=\frac{\alpha}{\beta}=\mu=-\frac{1}{\theta}. \tag{8.31}$$

又因为对方差可得下式

$$\mathrm{Var}[Y;\theta,\psi]=\frac{\alpha}{\beta^2}=\mu^2\psi=\frac{\psi}{\theta^2}. \tag{8.32}$$

这表明方差可表为 $V(\mu)\psi$, 其中 $V(\mu)=\mu^2$, 从而 $V(\cdot)$ 是方差函数. ∇

由一般的密度公式 (8.29) 可方便地求出 Y 的矩母函数，由此即可进一步推导指数散布族 的若干有用的性质.

引理 8.6.4(指数散布族的矩母函数) 对于每一个实数 t, 若在 (8.29) 中以 $\theta+t\psi$ 替换 θ 后，仍然得一密度. 密度 (8.29) 的以 t 为自变量的矩母函数由下式给出：

$$m_Y(t) = \exp\left(\frac{b(\theta+t\psi)-b(\theta)}{\psi}\right). \tag{8.33}$$

证明 我们仅给出连续情形的证明；关于离散情形的证明，只须将该证明中的在支撑集 D_ψ 上的积分改为关于 y 在 D_ψ 上的求和即可. 可将矩母函数如下依次写出：

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= \int_{D_\psi} e^{ty}\exp\left[\frac{y\theta-b(\theta)}{\psi}+c(y;\psi)\right]dy \\ &= \int_{D_\psi}\exp\left[\frac{y\{\theta+t\psi\}-b(\theta+t\psi)}{\psi}+c(y;\psi)\right]dy \\ &\quad\times\exp\frac{b(\theta+t\psi)-b(\theta)}{\psi} \\ &= \exp\frac{b(\theta+t\psi)-b(\theta)}{\psi}. \end{aligned} \tag{8.34}$$

上述最后一个不等式成立，是因为 (8.34) 中第二个积分号内的被积函数也是一个密度函数. ∇

推论 8.6.5(累积量母函数，半不变量，均值与方差) 若 Y 具有密度 (8.29), 则其 *累积量母函数* 等于

$$\kappa_Y(t) = \frac{b(\theta+t\psi)-b(\theta)}{\psi}. \tag{8.35}$$

作为推论，半不变量 $\kappa_j, j=1,2,\cdots$, 由下式给出：

$$\kappa_j = \kappa_Y^{(j)}(0) = b^{(j)}(\theta)\psi^{j-1}. \tag{8.36}$$

鉴于这一原因，通常 $b(\cdot)$ 称为 *累积量函数*. 在 (8.36) 中取 $j=1,2$, 即可推知 Y 的均值与方差分别为

$$E[Y;\theta] = \kappa_1 = b'(\theta), \quad \mathrm{Var}[Y;\theta,\psi] = \kappa_2 = \psi b''(\theta). \tag{8.37}$$

注意，均值仅依赖于 θ, 而方差等于散布参数 ψ 和 $b''(\theta)$ 的乘积. 方差函数 $V(\mu)$ 等于 $b''(\theta(\mu))$. ∇

推论 8.6.6(取样本均值) 假设 $Y_1,\cdots,Y_m$ 是随机变量 Y 的 m 个相互独立的拷贝，记 $\overline{Y}=(Y_1+\cdots+Y_m)/m$ 为其样本均值. 如果 Y 是具有固定函数 $b(\cdot)$ 和

$c(\cdot;\cdot)$, 又以 θ 和 ψ 为参数的指数散布族 中的一员, 则 $\overline{Y}$ 属于以 θ 和 ψ/m 为参数的同一类型的指数散布族, 若这一对参数是允许取的话.

证明　由 (8.33), 我们有

$$m_{\overline{Y}}(t) = \left\{m_Y\left(\frac{t}{m}\right)\right\}^m = \exp\left(\frac{b(\theta + t\psi/m) - b(\theta)}{\psi/m}\right). \tag{8.38}$$

这恰是以 θ 和 ψ/m 为参数的指数散布族 中一员的矩母函数. ▽

注意, 对 (负) 二项分布而言, 仅允许取 $\psi = 1$. 对其它重要的误差分布来说, ψ 仅允许取任意的正实数.

例 8.6.7(泊松乘数与样本均值)　由推论 8.6.6, m 个独立的 Poisson(μ) 随机变量的样本均值具有如 (8.29) 所示的指数散布族 密度, 其中 $b(\cdot)$, $c(\cdot;\cdot)$ 与 θ 和泊松密度表示式中的一致, 但需以 $\psi = 1/m$ 置换 $\psi = 1$, 且以 $\{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \cdots\}$ 为其支撑集. 这样的样本均值事实上可视为是 Poisson($m\mu$) 随机变量与 $1/m$ 相乘. 为拓展这一想法, 令 $\psi > 0$ 是任一实数, 它未必是某一整数 m 的倒数. 现考察

$$Y = \psi M, \quad 其中 \quad M \sim \text{Poisson}(\mu/\psi). \tag{8.39}$$

不难验证, 上述 Y 具有如 (8.29) 所示的密度, 其中 $\theta = \log\mu$, $b(\theta) = e^\theta$. 这恰和通常的泊松分布 的密度表达式是一致的, 仅是 ψ 为任一正数. 这样, 对每一 ψ, 皆可定义一个以 $\theta \in \Re$ 为参数的指数散布族 的子类. Y 的可能取值为 $\{0, \psi, 2\psi, \cdots\}$.

如前所述, 对 $\psi = 1/m$, 我们得到的是一个 m 个 Poisson (μ) 随机变量的平均值. 当 $\psi = n$ 时, 相应的随机变量具有这样的性质, 它的一个样本容量为 n 的样本均值服从 Poisson(μ) 分布. 若 $\psi = n/m$, (8.39) 中的 Y 便是 m 个 $\psi = n$ 型的随机变量的样本均值. 于是, 对 ψ 这些取值而言, 称随机变量 Y 为泊松均值是合理的. 不过, 由 (8.39), 我们也可称这样的随机变量为泊松乘数. 注意, 当 $\psi > 1$ 时, 我们将得到一个方差大于均值的随机变量, 所以文献中也将这样的随机变量命名为“超散布泊松”. ▽

注 8.6.8(二项与负二项分布)　负二项分布 NB(r, p) 仅当视 r 为固定常数, 且取 $\psi = 1$ 时, 才能由 (8.29) 描述. 这一事实可如下验证之. 假设存在一个由 r, p 至 θ, ψ 的参数化, 使得所有负二项分布的密度皆可表述成 (8.29) 的形式. 现考虑两个具有相同 θ, 不同 ψ 的分布. 由此推出这两个分布具有相同的均值和不同的方差. 若以 r_0, p_0 与 r_1, p_1 分别表示这两个负二项分布的参数, 则由 (8.36) 知, 它们的方差之比恰等于它们的 ψ- 参数之比, 而它们的三阶半不变量 之比则为前述比例的平方. 于是有

$$\frac{r_0(1-p_0)}{p_0} = \frac{r_1(1-p_1)}{p_1};$$

$$\frac{\psi_0}{\psi_1} = \frac{r_0(1-p_0)}{p_0^2} \Big/ \frac{r_1(1-p_1)}{p_1^2} = \frac{p_1}{p_0}; \tag{8.40}$$

$$\left(\frac{\psi_0}{\psi_1}\right)^2 = \frac{r_0(1-p_0)(2-p_0)}{p_0^3} \Big/ \frac{r_1(1-p_1)(2-p_1)}{p_1^3} = \frac{p_1^2}{p_0^2}\frac{2-p_0}{2-p_1}.$$

上述最后两个等式仅当 $p_0 = p_1$ 时才能同时成立，所以也必然有 $r_0 = r_1$. 类似讨论亦可证明二项分布的 n- 参数也必须是固定的. ▽

作为引理 8.6.4 中推导出的矩母函数 的另一重要推论，我们能够求得具有相同 ψ, 不同 θ 的指数散布族 的其它成员. 这可借助第 5 章中提及的 Esscher 变换来完成.

推论 8.6.9(指数散布族与 Esscher 变换) 一个连续密度 $f(y)$ 的以 h 为参数的 Esscher 变换是下述密度

$$f_h(y) = \frac{e^{hy}f(y)}{\int e^{hz}f(z)dz}, \tag{8.41}$$

这里假定分母是有限的，亦即 $f(y)$ 的矩母函数在 h 处存在的. 对于离散分布，也可以定义一个类似的概率函数变换. 在这两种情形下，变换密度的矩母函数皆可表达为 $m_h(t) = \frac{m(t+h)}{m(h)}$. 这样，对于指数散布族中的密度 f 来说， f_h 的累积量母函数可表为下述形式：

$$\begin{aligned}\kappa_h(t) &= \frac{b(\theta+(t+h)\psi)-b(\theta)}{\psi} - \frac{b(\theta+h\psi)-b(\theta)}{\psi} \\ &= \frac{b(\theta+h\psi+t\psi)-b(\theta+h\psi)}{\psi}.\end{aligned} \tag{8.42}$$

显然，它仍是一个具有参数 $\theta_h = \theta + h\psi$ 和相同 ψ 的指数散布族 成员的累积量母函数. ▽

注 8.6.10(指数散布族中特定子类的生成) 不难验证，以 $h \in \Re$ 为参数的 Esscher 变换完成下述分布间的转换：

1. $N(0,1)$ 至 $N(h,1)$;
2. Poisson (1) 至 Poisson(e^h);
3. $B(m,\frac{1}{2})$ 至 $B(m,(1+e^h)^{-1})$;
4. NB$(r,\frac{1}{2})$ 至 NB$(r,1-\frac{1}{2}e^h)$, 其中 $-\infty < h < \log 2$;
5. $\Gamma(1,1)$ 至 $\Gamma(1,1-h)$, 其中 $-\infty < h < 1$;
6. IG$(1,1)$ 至 IG$(1,1-2h)$, 其中 $-\infty < h < \frac{1}{2}$.

综上所述，我们已给出的指数散布族中的所有例子皆可如下生成：自每一类型中的一个简单的原型成员出发，在允许的范围内作 Esscher 变换 或完成 (8.39) 所示的乘法. ▽

典则联结

指数散布族定义中采用的参数化导致对数似然函数中将出现形如 $y\theta$ 的一项. 鉴于这一性质, 我们称 θ 为 *自然* 或 *典则* 参数. 相应地, 也有一个关于联结函数的自然选择.

定义 8.6.11(典则联结函数)　若联结函数 $\eta = g(\mu)$ 使得参数 θ 和线性预估量 η 相一致, 则称其为 *标准联结* 或 *典则联结*. ∇

注意到 $\eta(\theta) = g(\mu(\theta))$, 即知, 若联结函数 $g(\mu)$ 是 $\mu(\theta) = b'(\theta)$ 的反函数, $\eta \equiv \theta$ 便成立. 典则联结有若干有趣的性质. 先回忆下述事实, 对于线性预估量有 $\eta_i = \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\,\beta_j$.

性质 8.6.12(典则联结与边缘总和)　由性质 8.3.9 知, 对于具有对数联结的泊松广义线性模型来说, 拟合的边缘总和与观测值的总和相符. 这一结论可被进一步推广如下: 若 $\hat{\mu}_i$ 是在任一具有典则联结的广义线性模型中采用极大似然法求得的关于观测量 Y_i 的拟合值, $i = 1, \cdots, n$, 则有下述等式

$$\sum_i w_i\, y_i\, x_{ij} = \sum_i w_i\, \hat{\mu}_i\, x_{ij}, \quad j = 1, \cdots, p. \tag{8.43}$$

若 x_{ij} 是用以甄别某组 (如表中的一行或一列) 成员的虚拟量, y_i 是 w_i 个独立同分布的观测量的平均值, 上式左端便表示观测值总和, 右端则为拟合值的总和.

为证明 (8.43) 式, 我们可利用如下的事实: 使对数似然函数达到最大值的诸 $\hat{\beta}_j$ 必定满足正则方程. 当 y 是可观测的时, 参数的对数似然函数可表为

$$l(\beta_1, \cdots, \beta_p; y) = \log f_Y(y; \beta_1, \cdots, \beta_p). \tag{8.44}$$

所有观测值集合 $Y_1 = y_1, \cdots, Y_n = y_n$ 的总似然函数的极值满足下述条件 (即正则方程):

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial \beta_j} l(\beta_1, \cdots, \beta_p; y_i) = 0, \quad j = 1, \cdots, p. \tag{8.45}$$

现考虑 l 关于 β_j 的偏导数. 由链规则, 以及关于典则联结有 $\theta \equiv \eta$, 即知

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_j} = \frac{dl}{d\theta}\frac{\partial \theta}{\partial \beta_j} = \frac{dl}{d\theta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta_j}, \quad j = 1, \cdots, p. \tag{8.46}$$

借助散布参数 ϕ 和已知的先验权重 w_i, 由 (8.29) 以及 $\mu(\theta) = b'(\theta)$ (见 (8.37) 式), 对观测值 $y_i, i = 1, \cdots, n$, 可得

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_j} = \frac{w_i(y_i - \mu_i)x_{ij}}{\phi}, \quad j = 1, \cdots, p. \tag{8.47}$$

最后, 将上式代入 (8.45) 即得形如 (8.43) 式的极大似然方程. ∇

标准联结的另一性质如下所述.

性质 8.6.13(充分统计量与典则联结) 若在广义线性模型中使用的是典则联结 $\theta_i \equiv \eta_i = \sum_j x_{ij}\beta_j$, 则 $S_j = \sum_i w_i Y_i x_{ij}$, $j = 1, \cdots, p$, 是一组充分统计量.

证明 我们将应用因子分解定理来证明这一性质. 为此, 只须证明 $Y_1, \cdots, Y_n$ 的联合密度可以表为如下两个因子的乘积:

$$\begin{aligned} & f_{Y_1,\cdots,Y_n}(y_1, \cdots, y_n; \beta_1, \cdots, \beta_p) \\ = & \, g(s_1, \cdots, s_p; \beta_1, \cdots, \beta_p) h(y_1, \cdots, y_n), \end{aligned} \tag{8.48}$$

其中 $g(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 是两个适当选定的函数, 而 $s_j = \sum_i w_i y_i x_{ij}$, $j = 1, \cdots, p$. 但是, 我们有

$$\begin{aligned} & f_{Y_1,\cdots,Y_n}(y_1, \cdots, y_n;\, \beta_1, \cdots, \beta_p) \\ = & \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{\phi/w_i} + c(y_i;\phi/w_i)\right) \\ = & \exp\left(\sum_i \frac{y_i \sum_j x_{ij}\beta_j - b\left(\sum_j x_{ij}\beta_j\right)}{\phi/w_i}\right) \exp\left(\sum_i c(y_i;\phi/w_i)\right) \\ = & \exp\left(\frac{1}{\phi}\left[\sum_j \beta_j \sum_i w_i y_i x_{ij} - \sum_i w_i b\Big(\sum_j x_{ij}\beta_j\Big)\right]\right) \exp\left(\sum_i c\left(y_i; \frac{\phi}{w_i}\right)\right). \end{aligned} \tag{8.49}$$

由上述表达式即可导出 (8.48) 式中所要求的 $g(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$, 这时下述事实将起到很关键的作用, 即 Y 的支撑集既不依赖于 θ, 也不依赖于诸参数 β_j. ∇

精算实务中有时会出现这样的情形, 即表中并未给出所有的分离项, 给出的仅是行和与列和. 但若采用标准联结, 这些边缘总 和便是充分统计量, 于是仅须知道这些结果, 就可求出参数极大似然估计. 此外, 在运用 Nelder 与 Wedderburn 的最优化算法时, 采用标准联结也有便利之处, 这时算法仅需较少的步骤, 而且发生发散的情况也是极罕见的.

例 8.6.14(若干误差分布的典则联结) 如前所述, 典则联结为 $\theta(\mu)$, 而 $\mu(\theta) = b'(\theta)$, 故典则联结无非是 $g(\mu) = (b')^{-1}(\mu)$. 指数散布族中若干重要子类的典则联结已列录在表 E 中. 对正态分布而言, 由于 $b(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2$, 其典则联结即为恒同函数. 对泊松和泊松乘数 来说, 因 $\mu(\theta) = e^\theta$, 故对数联结即为标准联结. 类似地可推出, 伽玛分布 的典则联结为倒数函数, 而二项分布 的典则联结则为分对数联结 $\theta = \log\frac{p}{1-p}$ (对数 - 机会比).

如果 $\theta \equiv \eta$, 而且 $\eta \equiv \mu$, 则显然有 $b'(\theta) = \theta$, 从而借助 (8.36) 导出的一系列半不变量与正态分布的半不变量相同. ∇

例 8.6.15(门限模型：分对数与概率单位分析)　以 Y_i 表示 n_i 次独立重复试验中成功次数所占的比例，其中每次试验中成功的概率为 $p_i, i=1,\cdots,n$. 进一步假设一次试验被认定为成功的，若运用于一个人的"剂量" d_i 超过了他的容忍度 $X_{ik}, k=1,\cdots,n_i$, 这里假定 X_{ik} 是一个服从 $N(\mu_i,\sigma^2)$ 分布随机变量，这里 μ_i 是辅助变量的线性函数. 显然,

$$p_i = \Phi(d_i;\mu_i,\sigma^2) = \Phi\left(\frac{d_i-\mu_i}{\sigma}\right). \tag{8.50}$$

于是，我们便具有一个以二项分布作为随机分量且以 $\eta=\Phi^{-1}(p)$ 作为联结函数的广义线性模型.　对于二项分布，有下述的典则联结函数

$$\theta=\eta=\log\frac{p}{1-p},\quad 于是\quad e^\eta=\frac{p}{1-p},\quad 0<p<1. \tag{8.51}$$

求解上述方程可得 $p=e^\eta/(e^\eta+1)$. 现记 $d^*=(d-\mu_i)/\sigma$. 我们若用一个以 $F_{X_{ik}}(d)=e^{d^*}/(e^{d^*}+1)$ 为分布函数的逻辑斯谛分布 logistic(μ_i,σ) 来置换容忍随机变量 X_{ik} 的分布，即得到一个具有标准联结的二项广义线性模型.

若直接假设门限变量 X_i 服从正态分布，　则称为 *概率单位* (probit) *分析*; 否则，称为 *分对数* (logit) *分析*. 第二种技巧无非是广义线性模型中这样的一种可乘模型，它不是针对成功的概率 p 自身，而是针对所谓的 *机会比* $p/(1-p)$. 概率单位分析适用于与分对数分析相同的情况，且产生类似的结果.

分对数与概率单位模型可运用于信用保险，即基于被保险人的某些特征，来估计其违约的概率. 另一种应用是确定致残概率的问题. 在计量经济学中，这样的分析也有多种用途，例如在给定某家庭的总人口数、总收入等信息的情况下，需估计该家庭拥有一辆汽车的概率.　∇

Nelder 与 Wedderburn 算法

(8.45) 给出了一组极大似然估计 $\hat\beta_j, j=1,\cdots,p$, 应满足的方程组. 可利用 Newton-Raphson 迭代法来求解这组方程. 在一维情形，该方法将作为方程 $f(x)=0$ 根的一个最近获得的最优解 x_t 转换成一个可能更优的由下式表示的 x_{t+1}:

$$x_{t+1}=x_t-(f'(x_t))^{-1}f(x_t). \tag{8.52}$$

对于 n 维最优化来说，如把上式中的 x 理解成向量，再把倒数理解成由诸偏导数组成的矩阵的逆矩阵，则该式仍然有效. 若将此式应用于 (8.45) 式即知，我们需要一个由似然函数 l 的诸二阶偏导数组成的矩阵，通常称这样的矩阵为 Hessian 矩阵. Nelder 与 Wedderburn 算法中使用的不是 Hessian 矩阵自身，而是它的期待值，即 *信息矩阵*. 如此衍生而成的技巧通常称为 Fisher *评分技巧*. 可以证明，这样的迭代方法适用于求解加权回归问题.

§ 8.7 习 题

§8.2

1. 对于在广义线性模型的随机分量中提及的诸分布中，分别给出它们的密度 (含可能的取值范围)、均值与方差.

2. 假设 $X_i \sim \Gamma(\alpha, \beta_i)$, 其中参数 $\alpha = 1/\phi$, $\beta_i = 1/(\phi\,\mu_i)$. 试证明所有 X_i 具有相同的变异系数， 再求其偏度.

§8.3

1. 验证 (8.4), (8.16) 和 (8.17) 三式. 再验证 (8.11) 描述了 (8.13) 在假设 (8.14) 之下的最大值.

2. 证明 Bailey-Simon 方法、边缘总和法、最小二乘法以及直接法皆可表为加权边缘总和法，即求解下述方程组：

$$\sum_{i(j)} w_{ij}\, z_{ij}(\alpha_i\beta_j - y_{ij}) = 0, \quad \forall\, j(i),$$

其中

$$\begin{aligned} z_{ij} &= 1 + \frac{y_{ij}}{\alpha_i\,\beta_j} && \text{Bailey-Simon 方法,} \\ &= 1 && \text{边缘总和法,} \\ &= \alpha_i\,\beta_j && \text{最小二乘法,} \\ &= \frac{1}{\alpha_i\,\beta_j} && \text{直接法.} \end{aligned}$$

3. 证明直接法与最小二乘法的可加模型与一个边缘总和相符.

4. $Y_{ij}/(\alpha_i\beta_j)$ 的均值与方差应满足怎样的要求才能使得 (8.17) 会导出关于 α_i 的 最优 估计 (见习题 §7.4 第 1 题)?

5. 自 $\hat{\alpha}_1 = 1$ 出发，确定例 8.3.12 中的 $\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1$ 与 $\hat{\beta}_2$. 验证关于 $\hat{\alpha}_1$ 所求得的解满足每一方程组中相应的方程. 又对于初始值 $\hat{\beta}_j \equiv 1$, 先求出不同模型中在首次迭代后得到的值，然后将这些值重新进行刻度变换使得 $\hat{\alpha}_1 = 1$. 解释利用 Bailey-Simon 方法所得的结果为何与边缘总和法的结果如此接近？

6. 比较例 8.3.12 中根据不同模型求得的总保费. 如果将所有权重 w_{ij} 皆除以 10, 那么会有怎样的结果？

7. 证明，当 S_{ij} 服从以 $w_{ij}\sigma^2$ 为方差的正态分布时， 最小二乘法将产生极大似然估计.

8. 如果以此节中四个方法去拟合 $\hat{\alpha}_i$ 和 $\hat{\beta}_j$ 的值，那么关于残差之和 $\sum_{i,j}(s_{ij} - w_{ij}\hat{\alpha}_i\hat{\beta}_j)$ 能说些什么？

§8.4

1. 验证 (8.23) 是否为泊松乘数 分布的比例偏差.

2. 验证 (8.26) 是否为伽玛分布的比例偏差.

3. 在性质 8.3.9 的模型中，证明 (8.23) 中的第二项恒为零.

4. 在关于期望值的可乘模型中，若参数是由直接法估计的，试证明比例偏差 (8.26) 中的第二项也为零.

§8.5

1. 对于 $i=j=3$, 验证 (8.27) 和 (8.28) 两式分别导出表 8.1 中关于模型Ⅳ和模型Ⅹ所列出的值.

2. 自表 8.1 中，确定 $\hat{\mu}, \hat{\alpha}_3$ 和 $\hat{\beta}_3$ 取怎样的值. 再以这些值验证 $\hat{y}_{33}$ 的值.

3. 对于模型 Ⅰ $\sim$ Ⅹ, 写出因对参数的制约越来越少而形成的相嵌模型的最长链. 约定 $A \subset B$ 表示模型 A 因其参数较模型 B 有较多的制约而可嵌入于模型 B 中. 试以这种方式给出上述相嵌模型的最长链.

4. 确定此节结束性评注中描述的，以年龄类、性别和地区为主要效应的模型自由度. 在前题所述的最长相嵌链的何处能置放这一模型？

§8.6

1. 证明关系式 $E\left[\frac{\partial l(Y)}{\partial \theta}\right]=0$ 和 $E\left[\frac{\partial^2 l(Y)}{\partial \theta^2}\right]+E\left[\left(\frac{\partial l(Y)}{\partial \theta}\right)^2\right]=0$, 其中 $l(y)=\log f_Y(y;\theta,\psi)$, 而 f_Y 由 (8.29) 给出. 借助这两式推导 Y 的均值与方差.

2. 对于表 E 中列举的所有分布，验证各项的正确性，即验证参数化，典则联结，累积量函数，作为 θ 函数的均值与方差. 再给出函数 $c(y;\psi)$ 的表达式.

3. 在泊松广义线性模型中，若是对数联结，则边缘总和方程可由 (8.43) 式导出. 试证，对于联结函数 $g(\mu)=\mu^\alpha$ $(\alpha>0)$ 来说，借助以 β_j 作为加权因子的极大似然方程的加权和，亦可导出相同的结论. 试问，对于具有这一联结函数的泊松观测量的偏差又有怎样的结论？

4. 对伽玛观测量讨论前一题中提出的问题.

5. 证明，对于指数散布族的所有成员来说，在全模型下关于 μ_i 的极大似然估计量是 $\widetilde{\mu}_i=y_i$.

6. 证明一般情形下的比例偏差由下式给出：

$$\frac{D}{\phi}=\frac{2}{\phi}\sum_i w_i\{y_i(\widetilde{\theta}_i-\hat{\theta}_i)-[b(\widetilde{\theta}_i)-b(\hat{\theta}_i)]\}.$$

7. 利用前一题中的结论，推导正态、泊松、二项、伽玛与逆高斯分布的比例偏差的表达式.

8. 证明注 8.6.10 中关于指数散布族中若干重要例子的 Esscher 变换的断言.



第9章 IBNR 技巧

§9.1 引 论

直至数十年前，非寿险行业还是采用根据现时情况支付的原则来经营的，即在一特定年的所有索赔都是根据同一年的保费收入来支付，而无视这些索赔是在哪一年起始的. 保单组合的财政平衡是这样实现的：在每一特定财政年度内，保证收集到的保费和支付的索赔款相平衡. 如一年中的保费收入和同一年支付的索赔款有差异，即会导致经营上的赢利和损失.

事实上，在一特定年起始的索赔经常不能在同一年内处理完毕. 譬如，对责任险而言，一般会有很长的法律程序，而且还有其它的延迟原因，例如很难评定确切的索赔额. 又如在致残险中，索赔也许需要稍后再予以薄记，或存在多次付款的情形. 所有这些因素都会延迟索赔的实际支付时间. 那些已经引发但还未充分掌握的索赔仅是在这样的意义下被预见的：对这些索赔必须支付款项，但不知其支付总额将是多少. 另需考虑这样的情形，在一特定年度关于诸索赔的保费已交纳，而保险商还未被通知其中任一个索赔已发生. 这时也存在需在以后年份予以再保的损失.

合理与逻辑地看，这样一些索赔现已和保费实际支付的年份联系起来. 这表明，准备金必须针对这样的索赔预留：已知这些索赔是存在的，但在确定准备金时还不知它们的最终额度是多少. 对于这样一些索赔，存在若干同义词. 一种称谓是 IBNR(incurred but not reported) 索赔，即已引发但还未薄记的索赔. 类似地，对 IBNR 方法，IBNR 准备金等也可作同样的理解. 其它的同义词是 IBNFR, IBNER 和 RBNFS, 其中 F 表示完全地 (fully), E 表示充分地 (enough). 已为保险商知悉的巨大索赔经常是根据情况逐一地予以处理的.

当对这些情况建模时，一般是自一种所谓的 *流量三角形* 出发的. 我们以下例说明它的编制方法.

1. 我们自 2000 年的一个由一定数目的合同所构成的保单组合开始. 假定至 2008 年 1 月 1 日，即起始年末的 8 年以后，所付的全部索赔款是完全已知的.

2. 在 2000 年发生的索赔必然要从 2000 年征收到的保费中支付.

3. 除了在 2000 年付款外，也可在 2001~2007 年间付款.

4. 类似地，对于以 2001 年为起始年的诸索赔来说，在 2001~2007 年间的索赔款是已知的，但需在 2008 年支付的款额却是未知的.

5. 对 2005 年来说，已知的索赔款是在 2005~2007 年间支付的款项，但在 2008

年以及更后时间的付款仍是未知的.

6. 对于那些在 2007 年已交付保费的诸索赔来说，至 2007 年 12 月 31 日，仅有在 2007 年的已付索赔款是已知的，但我们可以期待，更多的付款将在 2008 年以及更后的时间完成. 我们还可期待索赔将以一种类似于 2000~2007 年间的索赔发展模式演变.

发展模式可用表 9.1 中的三角形图示之. 三角形中的数字为所有已知的付款，这些款项是以起始年 i (代表行) 与发展年 j(代表列) 进行分组的. 对应于 2002 年的行共含 6 个至 2007 年 12 月 31 日为已知的数. 例如，此行中的第 3 个元素表示在 2002 年引发，且在第三个发展年，即 2004 年支付的索赔款. 在表 9.1 的三角形中，我们只考虑新的合同，譬如，若在 2000 年首发一类新颖的保单时，便可能出现这样的情形. 在这一年写出的业务中，平均而言，仅半年便在 2000 年产生了索赔，这是为何第 1 列中的数较第 2 列中的数略小的原因. 位于对角线 $i+j-1=c$ 上的元素表示日历年 c 的付款. 有许多种方法可将这同一批数据分组成一个三角形，但表 9.1 中给出的三角形是最常见的一种. 根据表 9.1 中列举的索赔款，我们要预测那些在未来日历年中予以支付或薄记的索赔，这些未来的年份对应于表 9.1 中右底部的三角形. 精算学中 IBNR 技巧的目的即是预测这些数字，从而将原三角形延拓成一正方形. 位于右底部三角形中的所有数字之和便是将在未来支付，且需自 2000~2007 年间征收的保费中予以支付的所有索赔款之总和. 这一总和恰为待留的准备金. 以上我们假定发展的模式持续了 8 年. 显然，有许多部门，譬如在责任险中，索赔在较 8 年更长的时间后可能仍然会被薄记. 如果出现这种情况，我们必须对第 7 年以后的发展年进行预测，但流量三角形对此却并未提供数据. 我们不仅需构造一个正方形，还需将三角形延拓成一个包容更多发展年的长方形. 通常的做法是假定发展过程在一定数目的年份后被终止，再对在考虑的发展期间以后的付款采用一个修正因子.

表 9.1　以发展年 (水平方向) 和起始年 (垂直方向) 表述付款的流量三角形

起始年	发展年							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2000	101	153	52	17	14	3	4	1
2001	99	121	76	32	10	3	1	
2002	110	182	80	20	21	2		
2003	160	197	82	38	19			
2004	161	254	85	46				
2005	185	201	86					
2006	178	261						
2007	168							

未来的付款是遵循已充分成熟的精算实践来估计的. 有时给出一个中心的估计量, 有时却考虑包含待估值与实际结果的一种全局可能性. 结果的均值和方差的估计是十分重要的. 已形成多种确定准备金的方法, 每一种会满足一些特定的要求. 这些方法具有不同的模型假定, 也产生不同的估计量. 在实践中, 最有可能产生 "最优" 估计量的方法将被用于确定期待索赔的估计, 而其它方法的结果将被用作评定随机结果变异的一种手段. 自然, 这是一个不太科学的途径.

利用表 9.1 中的三角形, 我们将给出不同的方法, 每一种会反映一定个数的外在因子的影响. 在起始年的方向, 保单组合大小的变异将会对索赔数字产生影响. 另一方面, 对发展年因子 (水平方向) 来说, 索赔处理程序或终结索赔的速度的变化也会对相应的索赔数字产生一定的影响. 对角线上的数字对应于特定日历年份的付款, 这些数字将会因通货膨胀而发生变化; 不过, 也会因法学的改变或递增的索赔倾向而起变化. 举例来说, 若在医疗业的责任险中, 风险逐年递增, 且由法庭判决的诉讼越来越多时, 这些变化便会在对角线的数字中体现出来. 换言之, 以发展年与日历年作为因子的分离模型可能是描述这样一些保单组合演变的最佳选择.

显然, 人们尝试对索赔产生的随机机制勾勒出一幅尽可能清晰的图景, 只要有可能就检验这一模型, 且最优地估计这一模型的参数, 从而构造出有关未知观测量的优良预估量. 尤其重要的是需了解索赔数字的方差是如何联系于均值的. 方差可以是一或多或少的常数, 也可能比例于均值, 比例于均值的平方, 或和均值间具有其它的关系. 详见下一节, 也可参看前述的有关广义线性模型 的一章.

恰似许多费率厘定技巧一样 (见前一章), 在精算学文献中, 经常是首先给出一种启发式的方法来构造 IBNR 三角形, 坚实的统计基础仅是随后才阐明的. 存在这样一种很基本的 GLM 有关它的极大似然估计量可以借助熟知的 *链梯法* 来计算. 另一方面, 也可能给出这样一种模型, 它涉及不太严格的统计结构, 而链梯法的计算则给出均方误差意义下的最优估计量. 我们将给出一个一般的广义线性模型, 它的特殊情况将导致若干熟悉的 IBNR 的估计方法, 诸如算术与几何分离法、链梯法等. 数值说明将在 §9.3 中给出.

§ 9.2　一个包容不同 IBNR 方法的广义线性模型

本节将给出这样一种广义线性模型, 若干常用与传统的构造 IBNR 三角形的精算方法皆可视为其特例. 关于这些方法的变形以及其它可行的方法, 可参见另外的文献. 表 9.2 中的随机变量 $X_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, t$, 表示对应于起始年 i 与发展年 j 的索赔款, 即在日历年 $i+j-1$ 支付的索赔款. 对于满足 $i+j \leqslant t+1$ 的组合 (i, j) 来说, X_{ij} 早已被观测到; 否则, 便是未来的观测量. 如同表示实际支付的索赔款一样, 这些数字也可用于表示损失比. 我们采用这样一种乘法模型, 它对每一行 i,

表 9.2　流量三角形中的随机变量

起始年	发展年				
	1	$\cdots$	n	$\cdots$	t
1	X_{11}	$\cdots$	X_{1n}	$\cdots$	X_{1t}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$t-n+1$	$X_{t-n+1,1}$	$\cdots$	$X_{t-n+1,n}$	$\cdots$	$X_{t-n+1,t}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
t	X_{t1}	$\cdots$	X_{tn}	$\cdots$	X_{tt}

每一列 j 与每一对角线 $k=i+j-1$ 皆赋予一个参数，确切地说，有下述关系式：

$$X_{ij} \approx \alpha_i \cdot \beta_j \cdot \gamma_k. \tag{9.1}$$

现假定上式左边的观测量与右边模型值之间的差异归因于偶然因素．若进一步假定诸随机变量 X_{ij} 是相互独立的，且限定其分布属于指数散布族，(9.1) 便可视为是前一章中所述的广义线性模型，这时的期望值可表为线性形式 $\log\alpha_i + \log\beta_j + \log\gamma_{i+j-1}$ 的指数，从而存在一对数联结．起始年、发展年与日历年皆可视为是观测量 X_{ij} 的解释变量．我们将在有关 X_{ij} 的概率分布的各种假定下，确定诸参数 α_i, β_j 与 γ_k 的极大似然估计．借助这一简便的途径，即可导出许多广为使用的 IBNR 技巧．

如确定了诸参数的估计量，即可简便地将三角形扩展成一个正方形：

$$\hat{X}_{ij} \approx \hat{\alpha}_i \cdot \hat{\beta}_j \cdot \hat{\gamma}_k. \tag{9.2}$$

存在的问题是，当 $k>t$ 时，尚无与日历年 k 相对应的 γ_k 之值的数据．该问题可如下解决，譬如，不妨假定 γ_k 具有一几何关系，即对某正实数 γ, 有 $\gamma_k \propto \gamma^k$.

链梯法

自模型 (9.1) 导出的第一个方法是 *链梯法*. 为此给出下述关于分布的假定：

$$X_{ij} \sim \text{Poisson}(\alpha_i\beta_j)\text{且相互独立}, \quad \gamma_k \equiv 1, \tag{9.3}$$

诸参数 α_i 与 β_j 可由极大似然法估计．

寓于链梯法的直观想法可如下解释之：在任一发展年中，可认为来自于每一起始年的索赔的比例是相同的．换言之，在流量三角形中列是成比例的．这一结论对于行也成立，这是因为一行中的所有数字都是第一个发展年付款的相同倍数．可由最小二乘法或一启发式方法（“力学平滑法”）来确定参数．后一方法导致最大化似然函数；但当关于每年成比例的假定受到质疑时，此方法已被证实是不太可靠的．

譬如，鉴于在医疗责任险中出现了较以往多得多的法律诉讼，关于列比例是常值的假定便显然不成立. 这可通过引入其它的假定加以弥补，譬如，作为起始年的函数，可假定相继列之间比例的发展是线性的. 这样的方法即可视为是链梯法某种变形.

为了说明关于 (9.3) 的似然函数的最大化问题如何求解，我们首先指出有一个参数是多余的，这是因为如以 $\delta\alpha_i$ 和 β_j/δ 分别替换 α_i 与 β_j，我们可得到相同的期望值. 为克服这一含糊性，我们对参数赋予一附加的限制. 一个自然的假设是令 $\beta_1+\cdots+\beta_t=1$，这是因为由此即可把 β_j 解释成拖延至第 j 个发展年才处理完毕的索赔所占的比例，而把 α_i 解释为起始年的 "容量"，即源于起始年 i 的所有已付款的总和. 我们已知在关于均值的对数模型中，观测量 $X_{ij}, i,j=1,\cdots,t;\ i+j\leqslant t$，是服从泊松分布的，故由性质 8.3.9 推知三角形的边缘总和，即已观测到的数字 X_{ij} 的行和 R_i 与列和 K_j 分别等于关于这些量的预估量 $\sum_j \hat{\alpha}_i\hat{\beta}_j$ 与 $\sum_i \hat{\alpha}_i\hat{\beta}_j$. 鉴于数据呈特定三角形状，边缘总和法的方程组便有一个简便的解法，也可参看表 9.3.

表 9.3 在流量三角形中的边缘总和方程

起始年	发展年					
	1	$\cdots$	n	$\cdots$	t	行和
1	$\alpha_1\beta_1$		$\alpha_1\beta_n$		$\alpha_1\beta_t$	R_1
$\vdots$						$\vdots$
$t-n+1$	$\alpha_{t-n+1}\beta_1$		$\alpha_{t-n+1}\beta_n$			R_{t-n+1}
$\vdots$						$\vdots$
t	$\alpha_t\beta_1$					R_t
Total	K_1	$\cdots$	K_n	$\cdots$	K_t	

1. 自第一个行和等式 $\hat{\alpha}_1(\hat{\beta}_1+\cdots+\hat{\beta}_t)=R_1$，可导出 $\hat{\alpha}_1=R_1$，然后由 $\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_t=K_t$ 即可求出 $\hat{\beta}_t$ 的值.

2. 假定对某一 $n<t$，我们已求出估计值 $\hat{\beta}_{n+1},\cdots,\hat{\beta}_t$ 和 $\hat{\alpha}_1,\cdots,\hat{\alpha}_{t-n}$. 此时可考虑下述两边缘总和方程：

$$\begin{aligned}&\hat{\alpha}_{t-n+1}(\hat{\beta}_1+\cdots+\hat{\beta}_n)=R_{t-n+1},\\&(\hat{\alpha}_1+\cdots+\hat{\alpha}_{t-n+1})\hat{\beta}_n=K_n.\end{aligned}\tag{9.4}$$

再因 $\hat{\beta}_1+\cdots+\hat{\beta}_t=1$，由第一个方程即可求出 $\hat{\alpha}_{t-n+1}$ 之值；然后再由第二个方程计算 $\hat{\beta}_n$ 之值.

3. 对 $n=t-1,t-2,\cdots,1$，重复上述步骤 2.

以下我们通过一例子来说明，如何借助这些参数估计将长方形未观测部分的预估量表示出来，见表 9.4. 考虑此表中位于单元 (3,4) 中的元素，我们以 ⋆ 记之. 它紧挨着已观测数字的边缘，且表示次一日历年 6 的索赔数字. 这一元素的预估值可表为

$$\hat{X}_{34} = \hat{\alpha}_3\hat{\beta}_4 = \frac{\hat{\alpha}_3(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3)\hat{\beta}_4(\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2)}{(\hat{\alpha}_1+\hat{\alpha}_2)(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2+\hat{\beta}_3)} = \frac{C_\Sigma \times B_\Sigma}{A_\Sigma}. \tag{9.5}$$

譬如，其中 B_Σ 为表 9.4 中已观测到的诸 B 元素的总和. (9.5) 中最后一个等式成立，乃因诸估计量 $\hat{\alpha}$ 与 $\hat{\beta}$ 满足边缘总和性质，而 B_Σ 与 C_Σ 恰分别是已观测值的列和与行和；再因 $A_\Sigma = R_1 + R_2 - (K_5 + K_4)$, 知其也可用相应的行和与列和表示出来.

表 9.4　以链梯法完成流量长方形的说明

	1	2	3	4	5
1	A	A	A	B	•
2	A	A	A	B	
3	C	C	C	⋆	
4	D	D	$\hat{D}$	⋆⋆	
5	•				

类似地，关于元素 ⋆⋆ 的预估量 $\hat{X}_{44}$ 也可依据边缘总和法如下计算之：

$$\hat{X}_{44} = \frac{D_\Sigma \times B_\Sigma}{A_\Sigma}, \tag{9.6}$$

以上 D_Σ 中包含了 $\hat{D}$. 注意，这不是一个实际的观测值，而是一个如上构造出来的关于单元 (4,3) 中的元素的预估值. 同一预估量也可如下计算 (见习题 §9.2 第 1 题):

$$\hat{X}_{44} = \frac{D_\Sigma \times (B_\Sigma + \star)}{A_\Sigma + C_\Sigma}, \tag{9.7}$$

从而遵循了关于次一日历年中观测量的相同流程. 这一流程恰阐明了长方形是如何自基本链梯法中的流量三角形构造出来的. 注意，这一流程也可产生构造正方形的相同估计，为此我们仅需交换发展年与起始年的作用，即考虑三角形关于对角线的镜像.

链梯法的基本原理允许有多种变形. 人们也许会质疑，在列之间是否确实存在比例关系. 无疑，这是由那些沿着描述索赔起始年的坐标轴而运作的效应所确定的. 当所有其它因子，至少是那些对理赔完毕的索赔所占的比例会产生影响的因子不依时间而变化时，通过链梯法能实现的仅是流量模式.

算术分离法

在算术和几何分离法中，索赔数字 X_{ij} 也是由时间的两个侧面，即发展年效应 β_j 和日历年效应 γ_k 来解释的，其中 $k=i+j-1$．这样，通货膨胀和流量模式是确定索赔数字的关键性因素．这样，通货膨胀和流量模式是确定索赔数字的关键性因素．对于 *算术分离法*，我们假定

$$X_{ij} \sim \text{Poisson}(\beta_j \gamma_k) \text{ 且相互独立}, \quad \alpha_i \equiv 1. \tag{9.8}$$

诸参数 β_j 和 γ_k 仍可由极大似然法予以估计．因这也是一个具有对数联结的泊松模型，故由性质 8.3.9 即知，此时边缘总和法依然适用．在模型 (9.8) 中，边缘总和是列和与关于对角线 $i+j-1=k$ 的求和．

在分离模型中，既假定在每一发展年中设定了一固定的百分比，也假定了沿着流量三角形中的对角线方向 (自左顶部至右底部) 运作的附加效应．于是，这一模型最佳地描述了这样的情况：索赔数字中反映了通货膨胀，或风险因其它原由而递增，譬如医疗责任险的逐年递增．这种递增是由关于每一日历年的一个指数因子来刻画的，该因子对平行于对角线的观测量取常值．在表 9.3 中我们假定随机变量 X_{ij} 是关于起始年 i 与发展年 j 的平均损失数字，即属于单元 (i,j) 的总损失数除以那里发生的索赔次数而得之商．

根据一个非常类似于链梯计算的方法，我们也可获得算术分离法中的参数估计．这一方法最初是由 Verbeek (1972) 给出的，现阐述于下．首先，我们有 $E[X_{ij}]=\beta_j\gamma_{i+j-1}$．其次，因参数 $\beta_j, j=1,\cdots,t$，描述了对于发展年 j 设定的比例，又因假定在 t 个发展年后索赔皆已处理完毕，便有 $\beta_1+\cdots+\beta_t=1$．于是，利用边缘总和方程 (例如参见表 9.3)，我们便可立即确定最优因子 $\hat{\gamma}_t$，它反映了基础水平时间的通胀，也体现了最长一条对角线上观测量之和 $\sum_i X_{i,t+1-i}$．因 β_t 仅出现在最后一列上，我们有 $\hat{\beta}_t=\hat{X}_{1t}/\hat{\gamma}_t$．利用此量，我们可进一步计算 $\hat{\gamma}_{t-1}$，然后再计算 $\hat{\beta}_{t-1}$，如此以往．恰如链梯法所述，这样构造出来的估计量必满足边缘总和方程．于是，由性质 8.3.9 即知，它们是极大似然估计量．

为填满正方形的其余部分，我们还需要知道和相应估计量 $\hat{\beta}_j$ 相乘的诸参数 $\gamma_{t+1},\cdots,\gamma_{2t}$ 之值，我们可通过以某种方式外插序列 $\hat{\gamma}_1,\cdots,\hat{\gamma}_t$ 而确定这些参数的值，有许多技巧可完成这一计算，譬如利用对数线性外插法．

几何分离法

几何分离法 涉及下述统计模型中参数的极大似然估计：

$$\log(X_{ij}) \sim N\left(\log(\beta_j\gamma_k), \sigma^2\right), \text{且相互独立；} \alpha_i \equiv 1. \tag{9.9}$$

此模型中 σ^2 是一未知方差．鉴于 $E[\log X_{ij}]=\log\beta_j+\log\gamma_{i+j-1}$．我们便得到一个

通常意义下的回归模型，其参数即可借助常用的方法来估计．不过，自 $\prod_j \beta_j = 1$ 这些参数也可通过前述的逐次置换法来估计．

注意，此模型中的值 $\beta_j\gamma_{i+j-1}$ 并 不等于X_{ij} 的期望值．事实上，它仅是中位数，我们有

$$E[X_{ij}] = e^{\sigma^2/2}\beta_j\gamma_{i+j-1} \quad 和 \quad \Pr[X_{ij} \leqslant \beta_j\gamma_{i+j-1}] = \frac{1}{2}. \tag{9.10}$$

De Vijlder 的最小二乘法

在 De Vijlder 的最小二乘法中，假定 $\gamma_k \equiv 1$，而诸参数 α_i 与 β_j 则是通过使平方和 $\sum_{i,j}(X_{ij} - \alpha_i\beta_j)^2$ 最小化来确定的．不过，这一做法等效于在下述模型中以极大似然法来确定 α_i 和 β_j：

$$X_{ij} \sim N(\alpha_i\beta_j, \sigma^2), 且相互独立, \ \gamma_k \equiv 1. \tag{9.11}$$

恰似链梯法一样， 在此方法中假定，有关一个特定的起始年 / 发展年组合的付款将取决于两种因素．首先，一个参数刻画了起始年，它和那一年保单组合的容量成比例．其次，另一个参数确定了索赔至其诸发展期限的末端将各以怎样一种比例被处理完毕．这些参数是由最小二乘法予以估计的．

§ 9.3　若干 IBNR 方法的数值说明

起始年、发展年和日历年分别从三个不同的视角对时间作了刻画．显然，这些参数的引入有时会导致过度的参数化．这样，其中许多参数将被剔除，即令它们均等于 1; 而另有一些参数则可能要求它们是相等的．譬如，这可通过将那些针对某一因子具有不同值的类别加以合并而达到．允许类别可合并会导致同时考虑许多模型，在这些情形有时将难于构造合适的显著性检验．此外，有序的分类法 (诸如年龄类和奖惩级别)，除了在边界或对某些特定的类，也许会引入一个参数，用以描述每类有一种固定的增加．在对数线性模型中，为将联系于固定水平 (即分类) 的任意参数值以一种关于这些参数值的几何进展模式来代替，极易通过以实际的水平来替换虚拟的因子而实现．若用 GLIM 的行话叙述，即视这一变量 (variable) 为变数 (variate)，而非一个因子．以一种关于某实数 α 的几何进展 α^{i-1} 来代替满足 $\alpha_1 = 1$ 的任意值 α_i，意味着假定组合容量每年以一个固定的百分比增加或减少．对于参数 β_j 做同样的处理，表明索赔被理赔完毕的比例随着每一发展年以一个固定的比例减少．通常第一个发展年将有别于其它的发展年，这是因为第一年中一般仅考虑三个季度．这时最佳的处理办法是允许对于第一年有一分离的参数，即对实数 β_1 和 β，考虑 $\beta_1, \beta^2, \beta^3, \cdots$．这时替代于原来的 t 个参数 $\beta_1, \cdots, \beta_t$，我们仅需处理 2 个参数．通过引入一个虚拟变量来指明联系于观测量 X_{ij} 的日历年 $k = i + j - 1$

是在 k_0 以前或以后，并分别令其以一个因子 1 或 δ 对均值做出贡献，我们便得到涉及这样一种年份的模型，该年份及其以后的通胀率有别于其它年份标准固定的通胀率.

根据最大可能 (即全模型的) 似然函数与一特定模型的最大似然函数之间的差别，可以确定观测数据与预估值之间的某种“距离”，譬如，我们可以启用前一章提及的 (比例) 偏差. 利用这一距离便可检验是否值得引入更多的参数而使模型复杂化. 现考虑这样一种嵌入模型，即它的参数集可借助对原有模型的参数集赋予某些线性约束关系而构造出来. 对于这类嵌入模型有可能判断观测数据与预估值之间的距离是否“显著地”变大了. 可以证明在被剔除的参数是多余的零假设下，这一距离上的差近似地服从 χ^2 分布. 类似地，非嵌入模型的拟合优劣程度也可加以比较.

某些解决回归问题的软件可用于处理所谓的“虚拟陷阱”(即多重共线性) 问题. 这类问题的出现乃因对一些与其它变量相依的变量引入了参数. 另有一些程序在处理这类问题时更方便一些. 譬如，若将 (9.1) 中的所有三个效应都取成几何式的，且考虑下述预估量

$$\hat{X}_{ij} = \hat{\mu}\hat{\alpha}^{i-1}\hat{\beta}^{j-1}\hat{\gamma}^{i+j-2}, \tag{9.12}$$

运用 GLIM 的简便就如三个参数中的最后一个参数等于 1 一样. 注意，通过在 (9.12) 中引入 $\hat{\mu}$, 所有三个参数估计便皆可具有 $\hat{\alpha}^{i-1}$, $\hat{\beta}^{j-1}$ 与 $\hat{\gamma}^{i+j-2}$ 的形式. 类似地，可在 (9.1) 中置 $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 1$, 这时参数 $\mu = E[X_{11}]$ 便表示在第一个起始年与第一个发展年中的水平. 不难验证，此时不论利用 $E[X_{ij}] = \mu\alpha_i\beta^{j-1}$ 和 $E[X_{ij}] = \mu\alpha_i\gamma^{i+j-2}$ 中的哪一个模型，将求得相同的预估值. 利用模型Ⅷ将表 9.1 中的三角形延拓成一个正方形便得表 9.5. 标记有“总和”的列中包含了诸未来付款的行和，它们恰等于针对每一起始年预留的准备金. 位于左顶部的数字是已观测到的数据的估计值，位于右底部的数字是未来付款的预估值. 为判断哪一个模型是最优地拟合数据的，我们估计了 (9.1) 式的不多的一些模型. 这些模型均假定观测量是服从 Poisson$(\alpha_i\beta_j\gamma_{i+j-1})$ 分布的，详见表 9.6. 赋加诸如 $\beta_j = \beta^{j-1}$ 或 $\gamma_k \equiv 1$ 的约束关系，即可导出前一节中所述的各种模型. 读者不妨试着验证，为何不失一般性，可在模型 I 中选取 $\gamma_8 = 1$. 这表明与模型 II 相比，模型 I 仅多了 6 个待估的参数. 又注意，对模型 I 而言，$E[X_{ij}] = \mu\alpha_i\beta_j\gamma_{i+j-1}$. 因该模型有待借助 $t(t+1)/2$ 个观测值来估计 $3(t-1)$ 个参数，便知仅当 $t \geqslant 4$ 时，模型 I 方有意义.

所有其它的模型皆可嵌入至模型 I 中，这是因为它们的参数集皆可视为模型 I 的参数集的子集. 模型 I 的预估量最优地拟合了数据. 关于比例偏差和相应的自由度，现作出如下说明. 对于最完全的模型 I，链梯模型 II 没有以 95% 的水平在统计上被拒绝，这是因为它较模型 I 少 6 个参数， χ^2 的临界值为 12.6, 但这两个

表 9.5　表 9.1 中利用模型VIII估计的索赔数字，最后一列给出了所有未来预估付款的总和

起始年	发展年								总和
	1	2	3	4	5	6	7	8	
2000	102.3	140.1	59.4	25.2	10.7	4.5	1.9	0.8	0.0
2001	101.6	139.2	59.1	25.0	10.6	4.5	1.9	0.8	0.8
2002	124.0	169.9	72.1	30.6	13.0	5.5	2.3	1.0	3.3
2003	150.2	205.8	87.3	37.0	15.7	6.7	2.8	1.2	10.7
2004	170.7	233.9	99.2	42.1	17.8	7.6	3.2	1.4	30.0
2005	159.9	219.1	92.9	39.4	16.7	7.1	3.0	1.3	67.5
2006	185.2	253.8	107.6	45.7	19.4	8.2	3.5	1.5	185.8
2007	168.0	230.2	97.6	41.4	17.6	7.4	3.2	1.3	398.7

表 9.6　运用于表 9.1 中数据的一些模型的参数集，自由度
(= 观测值的个数减去待估参数个数所得之差) 与比例偏差

模型	使用的参数	自由度	比例偏差
I	$\mu, \alpha_i, \beta_j, \gamma_k$	15	25.7
II	μ, α_i, β_j	21	38.0
III	μ, β_j, γ_k	21	36.8
IV	$\mu, \beta_j, \gamma^{k-1}$	27	59.9
V	$\mu, \alpha^{i-1}, \beta_j$	27	59.9
VI	$\mu, \alpha_i, \gamma^{k-1}$	27	504.
VII	$\mu, \alpha_i, \beta^{j-1}$	27	504.
VIII	$\mu, \alpha_i, \beta_1, \beta^{j-1}$	26	46.0
IX	$\mu, \alpha^{i-1}, \beta_1, \beta^{j-1}$	32	67.9
X	$\mu, \alpha^{i-1}, \beta^{j-1}$	33	582.
XI	μ	35	2656

模型的比例偏差之差仅为 12.3. 算术分离模型 III近似地和模型 II 一样好地拟合数据. 具有一个任意流量模式 β_j 和一个常通胀率 γ 的模型IV等价于模型V，后者具有一个关于保单组合容量的常增长率. 习题 §9.2 第 3 题要求读者解释为何这两个模型是恒同的. 模型IV可嵌入至模型III中，且减少了 6 个参数，它的预估量显著地不如模型III. 类似地，模型V较模型II差. 模型VI和模型VII也是恒同的，它们对于观测值的拟合都极差. 在模型VIII中，除了第 1 年外，具有一种几何进展模式. 该模型似乎是一赢家：它相嵌于模型II中，且减少了 5 个参数，但并不显著地比模型II差. 它的拟合程度要优于模型VII. 在模型VII中，第 1 列没有被分离地予以处理. 比较模型VIII和模型IX，我们发现必定会偏爱保单组合容量的任意增长模式，从而拒绝

常增长率. 在模型 X 中既有一个常增长率, 又有一种几何进展模式, 这一模型的拟合程度也极差, 主要是因为第 1 个发展年是如此地有别于其它的发展年.

自仅含一个常数项的模型XI可发现, 模型VIII的"可解释的偏差的百分比"已超出 98%; 不过, 甚至是模型IX, 它仅含一个常数项和另三个参数, 也解释了 97.4% 的偏差.

模型VIII给出了下述预估量:

$$\text{VIII}: \hat{X}_{ij} = 102.3 \times \begin{bmatrix} i=1:1.00 \\ i=2:0.99 \\ i=3:1.21 \\ i=4:1.47 \\ i=5:1.67 \\ i=6:1.56 \\ i=7:1.81 \\ i=8:1.64 \end{bmatrix} \times 3.20^{j\neq 1} \times 0.42^{j-1}, \tag{9.13}$$

上述 $j \neq 1$ 将理解成是一个布尔表达式, 即为真时取值为 1, 非真 (此处即当 $j=1$ 的特殊列出现) 时, 取值为 0. 模型IX将导致下述估计量:

$$\text{IX}: \quad \hat{X}_{ij} = 101.1 \times 1.10^{i-1} \times 3.34^{j\neq 1} \times 0.42^{j-1}. \tag{9.14}$$

以起始年和发展年作为解释变量的泊松分布, 即链梯法, 适合于对索赔次数建模. 除了在表 9.1 中给出索赔次数外, 我们还已知平均索赔额, 详见表 9.7. 对于这些索赔额来说, 由因子 α_i 刻画的保单组合的容量是无关紧要的. 通货膨胀, 从而日历年, 是一重要的因子; 发展年也很重要, 这是因为仅是那些大索赔额才导致索赔处理的延迟. 于是, 对这些情况而言, 分离模型将更合适. 在可乘模型中, 我们在平

表 9.7 对应于表 9.1 中付款次数的平均付款额

起始年	发展年							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2000	62	146	117	175	203	212	406	318
2001	133	122	96	379	455	441	429	
2002	148	232	120	481	312	390		
2003	119	185	223	171	162			
2004	93	109	87	190				
2005	33	129	176					
2006	237	179						
2007	191							

均索赔额服从具有常变异系数的伽玛分布的假定下对它们作了估计.

表 9.8 中列举了各种模型. 可以看出模型的相嵌结构是 $7 \subset 6 \subset 4/5 \subset 3 \subset 2 \subset 1$; 模型 4 和 5 皆介于 6 与 3 之间, 但彼此互不相嵌. 我们如此尺度化偏差, 以使得最完全的模型 1 具有一个相等于其自由度, 即 15 的比例偏差. 这样一来, 我们可如下检验模型精细化的显著性. 即比较以比例偏差表示的赢利与以需额外待估的参数的个数作为自由度的 χ^2 分布 的临界值. 两链中有统计显著性的一步是自模型 7 至模型 6 的一步. 模型 5 中虽以任意的发展参数 β_j 来代替模型 6 中的几何进展 β^{j-1}, 但并未显著地改进了拟合程度. 通过引入一个关于通胀的参数 γ^{k-1} 可将模型 6 精细化至模型 4, 不过, 这也没有产生显著的改进. 模型 4 至 3 以及模型 3 至 2 的精细化均未显著地改进拟合, 但模型 1 显著地优于模型 2. 不过, 我们仍偏爱简单的模型 6, 这不仅是因为模型 6 未被模型 1 所控制, 还因为以额外 19 个参数的代价仅换来用比例偏差表示的 26.2 的赢利. 于是, 最优的估计是自模型 6 中得到的, 它在第 1 个发展年中给出的初始水平为 129, 在第 8 年递增至 $129 \times 1.17^7 = 397$. 注意, 相对于将 γ_{i+j-1} 取成几何式进展或取成常数, 若拟合并不因任意地设定 γ_{i+j-1} 而有显著改进, 则以忽略通胀率或将其取成常数 (或分段常数) 为佳; 否则仍然存在寻找 $\gamma_{t+1}, \cdots, \gamma_{2t}$ 的外插值的问题.

表 9.8　运用于表 9.7 中平均索赔额的各种模型的参数、自由度与比例偏差

模型	所用的参数	自由度	比例偏差
1	$\mu, \alpha_i, \beta_j, \gamma_k$	15	15.0
2	μ, β_j, γ_k	21	30.2
3	$\mu, \beta_j, \gamma^{k-1}$	27	36.8
4	$\mu, \beta^{j-1}, \gamma^{k-1}$	33	39.5
5	μ, β_j	28	38.7
6	μ, β^{j-1}	34	41.2
7	μ	35	47.2

若将关于起始年和发展年的平均索赔额的估计值与索赔次数的估计值 (见表 9.5) 联系起来, 我们即可得到待留存的总额, 这些数字在表 9.9 中标题为 "估计总额" 的一列中给出. 相应的模型是由组合两个可乘模型 6 与 IX 得到的, 于是估计的支付总额可由下式给出:

$$6 \times \text{IX}: \quad \hat{X}_{ij} = 13041 \times 1.10^{i-1} \times 3.34^{j \neq 1} \times 0.46^{j-1}. \tag{9.15}$$

上述模型在以下情况仍适用: 在实际中, 人们经常不满足由观测值与估计值构成的正方形, 也需要在对于起始年所作的相应估计中考虑那些在最末观测到的发展年之后的那些发展年, 这样就得到了一个预估值的长方形. 关于起始年的支付总额的

估计量等于 $\sum_{j=1}^{\infty}\hat{X}_{ij}$. 显然，仅当 (9.15) 一式中被组合的模型 6 与IX的关于每一发展年的系数皆小于 1 时，这些和才是有限的.

注 9.3.1(估计 IBNR 总额的方差) 在实际中估计 IBNR 总和的方差是非常必要的，因为这有助于给出这些估计值的一个预测区间. 如果选择的模型是正确的，且参数估计是无偏的，那么这一方差由两部分构成，其中一部分描述参数的不确定性，另一部分描述过程不规则的扰动性. 如果假定表 9.5 中的模型是正确的，参数估计又和实际值相符，则估计的行和便是泊松随机变量的预估值. 由于这些随机变量的方差与均值相等，各年的行和又是相互独立的，估计的过程方差的总和即等于估计的均值的总和，即为 $0.8+\cdots+398.7=696.8=26.4^2$. 若模型中存在超散布性，方差还必须乘以估计的超散布因子. 自然，实际的方差还应包括估计的均值的变异，不过这是很难求得的. 再一次假定所有参数都是正确地予以估计的，又假定模型也是正确的，其中包含索赔额和索赔次数相互独立性的假设，则表 9.9 中的数字便是关于以 $\lambda\mu_2$ 为均值的复合泊松随机变量的预估值. 索赔次数的参数 λ 可自表 9.9 中求得，伽玛分布支付额的二阶矩 μ_2 可自由 (9.13) 式给出的均值估计，再结合估计的散布参数导出. 对于由行与列因子解释的具有对数正态索赔数字的模型，Doray (1996) 给出了 IBNR 索赔的均值与方差的最小方差无偏估计. ▽

表 9.9 相应于表 9.1 与表 9.5 的索赔总额的观测值与预估值. 在已付总额的一列中给出了迄今为止已付的总额，在估计总额的一列中给出了待付总额的估计值

起始年	发展年								已付	估计
	1	2	3	4	5	6	7	8	总额	总额
2000	6262	22338	6084	2975	2842	636	1624	318	43079	0
2001	13167	14762	7296	12128	4550	1323	429	361	53655	361
2002	16280	42224	9600	9620	6552	780	800	398	85056	1198
2003	19040	36445	18286	6498	3078	1772	881	438	83347	3092
2004	14973	27686	7395	8740	3926	1952	971	483	58794	7331
2005	6105	25929	15136	8696	4324	2150	1069	532	47170	16771
2006	42186	46719	19262	9578	4762	2368	1178	586	88905	37733
2007	32088	42665	21215	10549	5245	2608	1297	645	32088	84224

注 9.3.2(超越链梯法的随机模型) 我们早已指出，在一个具有相互独立且服从 Poisson$(\alpha_i\beta_j)$ 分布的诸随机变量 X_{ij} 的模型中，极大似然估计可借助称之为链梯法的算法求得. Mack (1993) 给出了一组较少限制的分布假定，在这些假定下完成这一算法仍是可行的. 但在进一步讨论不涉及分布假设的模型时，他不能指定有待最大化的似然函数，从而他设法以最小方差无偏估计替代之. ▽

§9.4 习　题

§9.1

1. 可用多少种方法将表 9.1 中的数据安置在一张表格中，如在垂直或水平方向，并按递增或递减顺序来布列起始年、发展年与日历年？

§9.2

1. 证明 (9.6) 与 (9.7) 确实产生相同的估计量.

2. 证明 (9.10), 并试求模型 (9.9) 中随机变量 X_{ij} 的众数.

3. 将链梯法运用于以累积数字表述的 IBNR 三角形. 试解释为何以链梯法加以处理的流量三角形通常是以累积形式给出的？

起始年	发展年				
	1	2	3	4	5
1	232	338	373	389	391
2	258	373	429	456	
3	221	303	307		
4	359	430			
5	349				

4. 将算术分离法运用于前一题中的数据. 以线性或对数线性外插法确定缺省的 γ 值. 哪种方法看似更合适些？

5. 链梯法中最小化的是数据与预估值之间的何种距离？分离法中最小化的又是哪种距离？

§9.3

1. 验证，自模型 $E[X_{ij}] = \mu\alpha_i\beta^{j-1}$ 与 $E[X_{ij}] = \mu\alpha_i\gamma^{i+j-2}$ 可获得与 (9.12) 相同的预估值.

2. 在模型 I 中，我们有 $E[X_{ij}] = \mu\alpha_i\beta_j\gamma_{i+j-1}$, $i, j = 1, \cdots, t$. 试说明，为何不失一般性 (可令 $\gamma_t = 1$)? 于是，当 $t = 8$ 时，模型 I 比模型 II 仅多了 6 个待估的参数. 验证，对于模型 I 而言，有 $3(t-1)$ 个参数需借助 $t(t+1)/2$ 个观测值加以估计，因此模型 I 仅当 $t > 3$ 时才有意义.

3. 解释模型 IV 为何与模型 V 等价？

4. 对 $i = j = 1, 3, 5, 7$, 计算由模型 (9.13) 与 (9.14) 式预估的值，再将这些值与实际的观测值加以比较.

5. 验证 (9.15), 并利用此式确定 $\sum_{j=1}^{\infty} \hat{X}_{ij}$.

第10章　风险排序

§10.1　引　言

风险比较是精算最本质的工作. 本章提供一些数学上的概念和解决方法, 并给出一些可以推导的非寿险精算的重要结果. 风险即非负随机变量, 在以下两种情况下, 某一风险优于另一风险: 其一是后者 *较大*, 见 §10.2; 其二是后者具有 *较重的尾* (危险性较大), 见 §10.3. 较重的尾意思是该随机变量取大值的概率较大, 这就使得该风险与具有同样均值的其它风险相比没有优势, 因为这样的风险其取值更广, 从而降低了风险的可预见性. 我们将证明, 尾较重的风险具有较大的停止损失保费.

我们也将证明上述的第二种情形等同于风险厌恶型的决策者对风险的共同偏好. 根据一个风险小于另一个风险或一个风险并不比另一个风险更危险的事实, 我们可以推出前一风险在普遍使用的均值 - 方差序意义下仍然优于后一风险. 在这种序关系的比较下, 决策者偏好均值较小的风险; 在均值相等的条件下, 方差是决策者参考的第二个标准. 但是, 仅用这种序关系不能达到精算的目的, 因为用这种序作比较所得出的决策受到很多明智决策者的争议. 我们给出停止损失序的几个不变性质, 其中对于精算应用最重要的一个是当索赔次数或索赔额分布由另一更危险的分布取代时, 停止损失序在复合运算下具有不变性.

§10.4 给出了风险排序理论的许多应用, 其中一个应用就是个体风险模型比聚合风险模型风险更小. 在第 3 章, 我们已看到经典的聚合风险模型和个体风险模型有相同的均值, 但前者方差更大, 但开放的聚合模型的均值和方差都比个体风险模型的大. 本章, 我们将证明一些更强的结论, 例如, 考虑一个分布性质等同于个体模型的风险损失, 和另一个分布性质等同于通常的聚合模型的风险损失, 任何厌恶风险型的决策者都会偏好于前者, 并且其对应的所有停止损失保费较小.

由第 4 章的内容, 非破产概率可以表示为最大总损失变量 L 的分布函数, 其中 L 具有复合几何分布. 我们将证明, 如果在破产模型中将单一的理赔分布替换成所有厌恶风险型决策者偏好的风险分布, 那么破产概率将会变小. 在某些更一般的条件下, 上述结论对破产概率的 Lundberg 指数上界同样成立.

很多参数族对于其参数都是单调的, 即分布所对应风险的危险性随分布参数递增或递减. 考察这样的 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 分布子族, 其均值 $\frac{\alpha}{\beta}=\mu$ 固定, 我们将证明停止损失保费于任意点 d 的值随方差 $\frac{\alpha}{\beta^2}$ 递增, 因而关于 α 递减. 这样, 就有可能把任意一个伽玛分布与 $\Gamma(\alpha_0,\beta_0)$ 分布做比较. 某些伽玛分布会受到所有使用单调增效

用函数的决策者偏好，某些分布仅会得到厌恶风险型决策者的偏好，而其它类型决策者的选择又会有所不同.

第 1 章已证明，对于停止损失再保险，当自留风险的均值固定时其自留风险的方差最小. 从这个意义上看，停止损失再保险是最优的. 本章将证明更强的结论：任何厌恶风险型的决策者都偏好停止损失再保险所对应的自留风险. 同时，我们还将指出，所有厌恶风险型决策者对风险的普遍取舍反映在风险背后的保费上. 对于损失 X 和 Y, 如果每一个厌恶风险型决策者偏好 X, 则 X 的零效用保费更低，例如指数保费.

§10.5 给出了风险排序的另一个应用领域. 有时，当要计算某一风险的停止损失保费时，我们并不知道该风险的分布，而只知道该风险的整体特征，如均值 μ、风险取值上界 b 或方差 σ^2. 我们将利用这些特征给出停止损失保费的上下界.

上面所提到的一个求和式子里的各项要求非负且相互独立，可以想像这种限制约束太强. 很多不变性较强地依赖于随机变量的非负性，但是在金融精算应用中，所考虑的模型必须要包括获利和损失. 独立性的假设往往不能得到满足，例如，求和式中的各项是在一个随机利息力下的连续支付，又或者是当发生地震、水灾时的连续支付. 还有，丈夫和妻子的死亡风险也是明显有关的，一是因为任何一方的死亡都会使另一方伤心过度，二是因为双方的环境和个性相似 (物以类聚，人以群分), 从而影响生存者的死亡率. 但是，大多数传统的保险模型都有上述的独立性假设. 我们可以采用投资分散化，使资产组合的风险尽可能满足这个要求. 因此，投资组合里不能含有太多相关的风险，如一幢大楼不同楼层的火灾风险，或同一巨额再保风险所涉及的几个再保层面.

独立性假设在保险中扮演着非常重要的角色. 事实上，保险的本质就是承保很多细小的独立的风险，由大数定律和中心极限定理这两个基本的统计规律，保险人面临的随机形势变得越来越有可预见性. 某一风险可以被别的其它风险对冲，因为一份保单上的损失可能得到其它更多有利结果的弥补. 而且，独立性假设给我们的处理带来很大的方便，因为大多数情况下，我们所收集到的统计结果仅给出了风险的边际分布信息，并没有给出风险的联合分布信息，即没有给出这些风险相互关联的具体信息. 同时，独立性假设使得数学上的处理比风险联合分布的其它结构更容易处理. 注意，大数定律并没有指出随着保险人业务的扩大，保险人的随机资本金的方差趋于 0, 而是随业务的扩大变异系数 (标准差与均值的比值) 趋于 0.

§10.6 将考虑，当面对能够产生损益的保单组合，且其随机相依结构未知的情况时，如何作出安全的决策. 显然，如果这些随机变量之间呈现正相依特性时，那么其和的危险性会更大，这里正相依性是指当一部分随机变量取较大值时，其它变量也有随之取较大值的趋势. 如果变量之间不具备这样的相依性，比如是随机独立的或是具有负相依性，那么组合资产的损失就得到了很好的风险规避，组合资产更有预见性，对于厌恶风险型投资者来说，这样的资产组合更有吸引力. 在正相依情

况下，独立性假设很可能低估了资产的风险. 负相依性意味着当其中之一保单的理赔越高时，其它保单的理赔就有越低的趋势. 这里最关键的结果是，如果这些随机变量是极端正相依的 (即同单调)，那么这些变量之和的危险性最大.

§ 10.2 较大风险

本节及其之后的三节将比较风险，即比较非负随机变量. 我们很容易给出一个条件，使得在此条件之下一个风险 Y 大于 (更准确地，大于或等于) 另一个风险 X: 如果 X 几乎处处小于 Y, 即 $\Pr[X \leqslant Y]=1$, 那么一个使用单调增效用函数的决策者无疑将认为损失 X 好于损失 Y. 这引出如下的定义.

定义 10.2.1(“较大”风险) 对于两个风险 X 和 Y, 若存在一对 (X',Y) 使得 $X' \sim X$ 和 $\Pr[X' \leqslant Y]=1$, 则称 Y “大于” X. ▽

注意在这个定义中，我们并没有只考虑边际分布函数 F_X 和 F_Y, 而是考虑 X' 和 Y 的联合分布. 见下面的例子.

例 10.2.2(二项随机变量) 以 X 记 7 次投掷一枚均匀硬币出现正面的次数，以 Y 记 10 次投掷另一枚非均匀硬币出现正面的次数，这里非均匀硬币每次投掷出现正面的概率 $p>1/2$. 如果 X 和 Y 相互独立，则事件 $X>Y$ 的概率非零. 我们是否可以设计这样的一个试验，在该试验中能够定义随机变量 Y 和 X' 使得 X' 与 X 同分布，且 Y 不小于 X'?

为构造 $X' \sim X$ 使得 $\Pr[X' \leqslant Y]=1$, 我们按如下方式进行. 投掷以概率 p 出现正面的非均匀硬币 10 次，出现正面的次数记为 Y. 在前 7 次投掷中，每当出现正面，我们立即投掷另一枚以概率 $\frac{1}{2p}$ 出现正面的硬币. 以 X' 记第二枚非均匀硬币出现的正面次数，则 $X' \sim B(7,1/2)$, 与 X 同分布，因为第二枚硬币在前 7 次可能的投掷中每次能够成功 (出现正面) 的概率为 $p \times \frac{1}{2p}$. 显然，X' 与 Y 不独立，且 $\Pr[X' \leqslant Y]=1$. ▽

可以证明 Y “大于” X 的条件等价于下面加于边际分布函数上的一个简单的条件.

定理 10.2.3(较大随机变量有较小的分布函数) 存在一对随机变量 (X',Y) 使得 $X' \sim X$ 且 $\Pr[X' \leqslant Y]=1$ 当且仅当 $F_X(x) \geqslant F_Y(x), \forall x \geqslant 0$.

证明 必要性显然. 为证充分性，我们仅给出两种特殊情形的证明. 当 $F_X(\cdot)$ 和 $F_Y(\cdot)$ 都是连续单调增时，取 $X'=F_X^{-1}(F_Y(Y))$, 则可以证明 $F_Y(Y)$ 具有 $U(0,1)$ 分布，所以 $F_X^{-1}(F_Y(Y)) \sim X$. 由 $F_X \geqslant F_Y$ 可推出 $X' \leqslant Y$.

当 X 和 Y 为离散型时，考虑 $F_X(\cdot)$ 和 $F_Y(\cdot)$ 的如下逆函数: 对任意 $0<u<1$,

$$\begin{aligned} f(u)=x, &\quad \text{当 } F_X(x-0)<u \leqslant F_X(x) \text{ 时;} \\ g(u)=y, &\quad \text{当 } F_Y(y-0)<u \leqslant F_Y(y) \text{ 时.} \end{aligned} \tag{10.1}$$

现在，取 $U \sim U(0,1)$, 则 $g(U) \sim Y$ 和 $f(U) \sim X$. $F_X(x) \geqslant F_Y(x)$ 对任意 x 成立蕴涵了 $f(u) \leqslant g(u), \forall u$, 于是 $\Pr[f(U) \leqslant g(U)] = 1$. ▽

注 10.2.4("较大" 和较大风险)　为比较风险 X 和 Y, 我们只考虑它们的边际分布函数 F_X 和 F_Y. 因为联合分布函数此时已无关紧要，所以不失一般性，考虑 X 的任何一个版本. 这意味着当 Y 在定义 10.2.1 的意义下 "大于" X 时，可以假设较强的结论 $\Pr[X \leqslant Y] = 1$ 成立. 所以当考虑随机大时，可以假设风险是在概率 1 之下大于或等于. 这样做只需要用一个等价的风险来替代 X. ▽

在很多场合，我们会考虑一个涉及多个输入变量的模型. 通常，如果把模型的一个输入变量换成一个较大的，则模型的输出增加. 例如，比较 $X+Z$ 和 $Y+Z$, 其中风险 Z 与 X 和 Y 独立 (卷积). 一个不太平凡的例子是复合，在这里理赔次数和理赔额大小分布都可以替换.

定理 10.2.5(复合)　如果每个理赔额 X_i "小于" Y_i, $i \geqslant 1$, 记数变量 M "小于" N, 且所有变量相互独立，则 $X_1 + X_2 + \cdots + X_M$ "小于" $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$.

证明　考虑到注 10.2.4, 不失一般性，假设 $X_i \leqslant Y_i$ 和 $M \leqslant N$ 以概率 1 成立. 于是第二个表达式有不少于第一个表达式的项数，且每一项不小于第一个表达式中的对应项. ▽

以上使用的序概念 "大于" 称为 *随机序*, 其记号如下.

定义 10.2.6(随机序)　若风险 Y "大于" 风险 X, 则称 X 在随机序意义下小于 Y, 记作 $X \leqslant_{\text{st}} Y$. ▽

在文献中，术语 "随机序" 通常被用来指随机变量或它们分布之间的任何一种序的概念. 在本书中，随机序特指定义 10.2.6 中的序.

注 10.2.7(随机较大风险有较大均值)　随机序 $X \leqslant_{\text{st}} Y$ 的一个必要条件显然是 $E[X] \leqslant E[Y]$, 甚至 $E[X] < E[Y]$ 除非 $X \sim Y$. 见公式 (1.34), 其中取 $d=0$. 反之，$E[X] \leqslant E[Y]$ 并不能推出 $X \leqslant_{\text{st}} Y$. 一个反例：$X \sim \text{Bernoulli}(p)$, $\Pr[Y=c]=1$, 其中 $p=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<c<1$. ▽

注 10.2.8(相互交叉一次的概率密度或概率函数是有随机序的)　随机序的一个充分条件是两个随机变量的概率密度或概率函数满足，对某个 x_0, 当 $x<x_0$ 时 $f_X(x) \geqslant f_Y(x)$, 而当 $x>x_0$ 时不等式反向. 证明见习题 §10.2 第 1 题. ▽

可以证明序 $\leqslant_{\text{st}}$ 有如下基于效用理论的一个自然的解释.

定理 10.2.9(随机序和单调增效用函数)　$X \leqslant_{\text{st}} Y$ 当且仅当 $E[u(-X)] \geqslant E[u(-Y)]$ 对每个单调增效用函数 $u(\cdot)$ 成立.

证明　如果 $E[u(-X)] \geqslant E[u(-Y)]$ 对每个单调增函数 $u(\cdot)$ 成立，则该不等式对特殊函数 $h_d(y) = 1 - I_{(-\infty,-d)}(y)$ 也成立. 但 $E[h_d(-X)]$ 即为 $\Pr[X \leqslant d]$. 反过来，如果 $X \leqslant_{\text{st}} Y$, 则对某个 $X' \sim X$, 有 $\Pr[X' \leqslant Y] = 1$, 所以 $E[u(-X)] \geqslant E[u(-Y)]$. ▽

所以，$X \leqslant_{\mathrm{st}} Y$ 完全等同于使用单调增效用函数的所有决策者对损失风险 X 和 Y 的偏好排序.

§ 10.3 更危险的风险

在经济学中，当要在两个潜在的损失中作出选择时，人们通常偏好具有较小均值的损失风险. 如果两个风险有相同的均值，那么一些决策者简单地选择具有较小方差的那个风险. 这种均值 - 方差序的概念构成了经济学理论中 CAPM- 模型的基础. 而这对精算师来说是不够的，精算师必须关心那些从方差中无法看得出的小概率事件，这些事件一旦发生可能导致破产. 但是，所有厌恶风险的精算师都认同如果一个风险的极值有较大的概率，那么该风险更危险.

定义 10.3.1(较重的尾) 对于两个风险 X 和 Y, 如果 $E[X]=E[Y]$, 且存在某个实数 x_0 使得 $\Pr[X \leqslant x] \leqslant \Pr[Y \leqslant x]$, $x < x_0$, 但 $\Pr[X \leqslant x] \geqslant \Pr[Y \leqslant x]$, $x > x_0$, 则称 Y 的尾重于 X 的尾. ∇

在这个定义里，“较重的尾”性质是直接通过 X 和 Y 的分布函数来表达的：存在一个数 x_0 使得在 x_0 的左边 X 的分布函数较小，而在 x_0 的右边 Y 的分布函数较小，两个分布函数仅在 x_0 点相互交叉一次. 两分布函数交叉一次的一个充分条件是这两个函数的差先单调增，再单调减，最后再次单调增. 因此，我们有如下定理.

定理 10.3.2(概率密度或概率函数相互交叉两次蕴涵对应分布函数交叉一次) 设风险 X 和 Y 具有相同的均值，但有不同的概率密度或概率函数 f_X 和 f_Y. 如果存在区间 I_1, I_2 和 I_3 满足 $I_1 \cup I_2 \cup I_3=[0,\infty)$, I_2 在 I_1 和 I_3 中间，使得在 I_1 和 I_3 上 $f_X(x) \leqslant f_Y(x)$, 但在 I_2 上 $f_X(x) \geqslant f_Y(x)$, 则 X 和 Y 的分布函数仅交叉一次.

证明 首先由假设 $E[X]=E[Y]$ 和 $f_X \neq f_Y$, 可以得到分布函数 F_X 和 F_Y 至少交叉一次. 这是因为如果 F_X 和 F_Y 不相交，则由定理 10.2.3 知其中一个分布函数必在随机序意义下大于另一个，于是根据注 10.2.7 得到均值不相同. 在 0 点的左边和在 ∞ 处，两个分布函数差等于 0. 注意到概率密度或概率函数表示分布函数的导数或跳点的跨度. 在这两种情形下，两分布函数差首先单调递增，达到一个最大值，接着单调递减，达到一个最小值，最后再单调增趋于 0. 所以，存在一个位于 I_2 中的点，使得两个分布函数差于该点穿过 x- 轴，因此两个分布函数相互交叉一次. ∇

注意在离散情形，可能会出现 $I_1=[0,0]$ 或 $I_2=[b,b]$.

例 10.3.3(二项分布的尾轻于泊松分布) 如果比较 $B(n,p)$ 与 Poisson(np) 分布，那么我们知道二者有相同的均值，但后者有较大的方差. 这是否意味着泊松分布的尾重于二项分布？

我们将证明两分布的概率函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 具有定理 10.3.2 中的交叉性质. 为此, 我们证明两个概率函数的比值 $r(x)$ 先是单调增, 再单调减. 按习惯, 记 $q=1-p$, 则

$$r(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\binom{n}{x}p^x q^{n-x}}{(np)^x e^{-np}/x!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x q^x}q^n e^{np}. \tag{10.2}$$

现在考虑 $r(x)$ 相邻两个值的比 ($x=1,2,\cdots$):

$$\frac{r(x)}{r(x-1)}=\frac{n-x+1}{nq}\leqslant 1 \quad \text{当且仅当} \quad x\geqslant np+1. \tag{10.3}$$

因为 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 有相同均值, 所以它们至少交叉两次. 但这结合 (10.3) 得到 $r(x)$ 两次穿过水平线 1, 所以当 x 取较小或较大值时, $r(x)<1$; 而当 x 取值接近于 $np+1$ 时, $r(x)>1$. 现在, 应用定理 10.3.2 得泊松分布确实比二项分布有较厚的尾. ▽

注 10.3.4(较重尾关系不具有传递性) 很容易构造随机变量 X, Y 和 Z, 使得 Y 的尾重于 X, Z 的尾重于 Y, 但 Z 的尾并不重于 X. 在图 10.1 中, X 和 Y 的分布函数交叉一次, Y 和 Z 的分布函数也交叉一次, 但 X 和 Z 的分布函数交叉三次. 所以, 较重尾不是一个好的序概念: 序关系应该具有 *传递性*. 暂时用 $\leqslant_{\mathrm{tt}}$ 来记定义 10.3.1 中的关系. 我们按如下方式延伸这种关系到一对变量 X 和 Z, 从而使延伸后的关系具有传递性: 存在随机变量序列 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 使得 $X\leqslant_{\mathrm{tt}} Y_1$, $Y_j\leqslant_{\mathrm{tt}} Y_{j+1}, j=1,2,\cdots,n-1$, 以及 $Y_n\leqslant_{\mathrm{tt}} Z$. 按此方式延伸, 得到关系 $\leqslant_{\mathrm{tt}}$ 的有限传递封闭性, 从现在开始我们称之为 *间接较重尾关系*. ▽

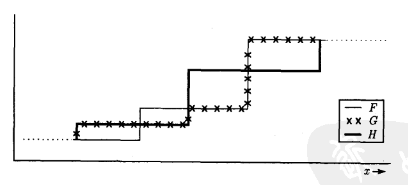


图 10.1 较重尾传递性的反例: H 的尾重于 G, G 的尾重于 F, 但 H 的尾并不重于 F

如果 X 在随机序意义下小于 Y, 则它们的分布函数不相交. 如果 Y 的尾间接重于 X, 则可以证明停止损失变换 $\pi_X(d)=E[(X-d)_+]$ 与 $\pi_Y(d)$ 不相交. 由归纳法, 这只需要对 Y 的尾直接重于 X 情形加以证明即可. 在后情形下, $\pi_Y(d)-\pi_X(d)$ 当 $d=0$ 时为 0 (因为 X 和 Y 的均值相等), 当 $d\to\infty$ 时趋于 0, 并且当 $\pi'_Y(d)-\pi'_X(d)=$

$F_Y(d) - F_X(d)$ 为正时单调增，否则单调减. 因此，Y 的尾重于 X 蕴涵了 Y 具有较大的停止损失保费.

我们也可以证明上述结论的逆命题. 如果 Z 的停止损失保费比 X 的大，且 $E[X] = E[Z]$, 则存在一个可能无限的分布函数序列连接 X 和 Z, 序列中分布的尾依次较重.

定理 10.3.5(较重的尾与较大的停止损失保费) 如果 $E[X] = E[Z]$ 和 $\pi_X(d) \leqslant \pi_Z(d)$ 对任意 $d > 0$ 成立，则存在一个分布函数序列 $\{F_1, F_2, \cdots\}$ 使得 $X \sim F_1$, $Z \sim \lim_{n\to\infty} F_n$ 且序列中分布的尾依次较重.

证明 当 Z 取有限个值时，我们给出证明主要步骤. 注意到 Z 的分布函数是阶梯函数，所以停止损失变换是分段线性连续凸函数. 因此，$\pi_Z(d)$ 可以写成

$$\pi_Z(d) = \max\{\pi_X(d), A_1(d), A_2(d), \cdots, A_n(d)\}, \quad -\infty < d < \infty, \tag{10.4}$$

其中 $A_1, \cdots, A_n$ 是线性函数. 现在定义以下的函数 $\pi_i(\cdot), i = 1, 2, \cdots, n+1$:

$$\pi_i(d) = \max\{\pi_X(d), A_1(d), A_2(d), \cdots, A_{i-1}(d)\}, \quad -\infty < d < \infty. \tag{10.5}$$

这些函数可以证明是停止损失函数，对应的分布函数记为 $F_i, i = 1, 2, \cdots, n+1$. 读者可以验证 $X \sim F_1$, $Z \sim F_{n+1}$, 且 F_i 的尾重于 F_{i-1}, $i = 2, 3, \cdots, n+1$ (见习题 §10.3 第 11 题). 如果 Z 的支撑集无限，那么我们必须考虑分布函数 F_n 在依分布收敛意义下的极限. ▽

对于停止损失保费可排序的两个随机变量，我们有如下的定义.

定义 10.3.6(停止损失序) 如果 X 比 Z 具有较小的停止损失保费，则称 X 在停止损失序意义下小于 Z, 记作 $X \leqslant_{\mathrm{SL}} Z$. ▽

如果一个风险变量 Z 在停止损失序意义下大于另一个具有相同均值的风险 X, 我们后面称 Z 比 X *更危险*. 注意对于停止损失序，不必要求等式 $E[X] = E[Z]$ 总成立. 当 $E[X] < E[Z]$ 时，我们可以证明如下定理.

定理 10.3.7(停止损失序的分离定理) 如果 $X \leqslant_{\mathrm{SL}} Z$ 和 $E[X] < E[Z]$, 则存在一个随机变量 Y 使得

1. $X \leqslant_{\mathrm{st}} Y$;
2. $Y \leqslant_{\mathrm{SL}} Z$ 和 $E[Y] = E[Z]$.

证明 取随机变量 $Y = \max\{X, b\}$, 其中 $b > 0$ 的选取使得 $E[Y] = E[Z]$, 则 Y 满足要求. 在习题 §10.3 第 12 题中，要求读者给出证明. ▽

随机变量 Y 在比 $\leqslant_{\mathrm{SL}}$ 更强的意义下分离了 X 和 Z. 习题 §10.3 第 13 题给出了另一个类似的分离定理，其中随机不等式 $\leqslant_{\mathrm{st}}$ 和 $\leqslant_{\mathrm{SL}}$ 的次序与上面定理中的次序互换. 一个在停止损失序意义下比 X 大的风险 Z 之所以不引人注意，是因为 Z 比一个风险 Y 更危险，而 Y 比风险 X 随机大.

类似于随机序，停止损失序也可以从效用的角度表示为一群明智的决策者面对两个风险时的共同偏好.

定理 10.3.8(停止损失序，单调增凹效用函数)　$X \leqslant_{\mathrm{SL}} Y$ 当且仅当 $E[u(-X)] \geqslant E[u(-Y)]$ 对任意单调增凹效用函数 $u(\cdot)$ 成立.

证明　根据定理 10.3.7，只需给出 $E[X]=E[Y]$ 情形的证明，而这又是后面定理 10.6.2 的特殊情形，见习题 §10.3 第 17 题.　∇

所以，停止损失序表示所有厌恶风险型决策者的共同偏好. 该序应用于损失变量，即非负随机变量. 如果两个一般的随机变量具有相同的均值，且对于任意 d 停止损失保费有一致的大小关系，则这两个变量之间是凸序关系，见 §10.6. 作为定理 10.3.8 的推论，两个变量的凸函数期望有一致的大小关系. 因为当 $\alpha \geqslant 1$ 时函数 x^α 是凸的，所以 $E[X^k] \leqslant E[Y^k]$, $k=1,2,\cdots$. 特别，当均值相同时，一个危险性较高的风险有较大的方差. 但如果 X 和 Y 的均值不等，该结论是不成立的. 一个简单的反例是：$X \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{2})$, $Y \equiv 1$.

除了随机序和停止损失序以外，还有一个从期望效用模型中导出的有用的序概念.

定义 10.3.9(指数序)　如果对任意 $\alpha>0$，所有使用风险厌恶系数为 α 的指数效用函数的决策者皆偏好损失 X 甚于 Y，则称 X 在指数序意义下小于 Y，记作 $X \leqslant_{\mathrm{e}} Y$.　∇

注 10.3.10(指数序与停止损失序)　显然，$X \leqslant_{\mathrm{e}} Y$ 等价于 X 的矩母函数在区间 $(0,\infty)$ 上小于 Y 的矩母函数. 风险间指数序的一个充分条件是停止损失序，因为当 $t>0$ 时 e^{tx} 于 $[0,\infty)$ 上是凸函数，所以 $E[e^{tX}] \leqslant E[e^{tY}]$ 对任意 $t>0$ 成立. 这也可以从效用角度考虑，因为指数序表示那些对待风险的态度与拥有财富额独立的一类决策者的共同偏好. 这一类决策者的群体小于停止损失序所对应的决策者群体. 事实上，存在一对随机变量满足指数序，但不满足停止损失序，见习题 §10.4 第 10 题.　∇

类似于随机序，停止损失序也有一些不变性. 如果把一个模型中的一个特殊项用一个更危险的项取代，那么通常能得到一个停止损失序的结果. 在精算中，一个序能否在复合运算下保持不变是很重要的. 首先，我们证明在一个停止损失序两边同时加上一个独立随机变量，或取混合运算，该序性质保持不变.

定理 10.3.11(停止损失序卷积封闭性)　如果风险 X 和 Y 满足 $X \leqslant_{\mathrm{SL}} Y$，且风险 Z 独立于 X 和 Y，则 $X+Z \leqslant_{\mathrm{SL}} Y+Z$. 进一步，如果 S_n 是 X 的 n 个独立拷贝之和，T_n 是 Y 的 n 个独立拷贝之和，则 $S_n \leqslant_{\mathrm{SL}} T_n$.

证明　第一个随机不等式可以利用如下关系式加以证明：

$$E[(X+Z-d)_+]=\int_0^\infty E[(X+z-d)_+]dF_Z(z). \tag{10.6}$$

多次应用第一个不等式可以得到第二个不等式. ∇

定理 10.3.12(停止损失序混合封闭性) 设分布函数 F_y 和 G_y 对任意 y 满足 $F_y \leqslant_{\rm SL} G_y$, $U(y)$ 是一个分布函数,并记 $F(x)=\int_{\Re} F_y(x)dU(y)$, $G(x)=\int_{\Re} G_y(x)dU(y)$. 则 $F \leqslant_{\rm SL} G$.

证明 F 的停止损失保费等于

$$\begin{aligned}\int_d^{\infty}[1-F(x)]dx &= \int_d^{\infty}\left[1-\int_{\Re}F_y(x)dU(y)\right]dx\\ &= \int_d^{\infty}\int_{\Re}[1-F_y(x)]dU(y)dx = \int_{\Re}\int_d^{\infty}[1-F_y(x)]dxdU(y).\end{aligned} \tag{10.7}$$

由此立即得证 $F \leqslant_{\rm SL} G$. ∇

推论 10.3.13(有序变量的混合) 以下的结论可以从定理 10.3.12 中立即得到:

1. 如果 $F_n(x)=\Pr[X\leqslant x|N=n]$, $G_n(x)=\Pr[Y\leqslant x|N=n]$, 且对任意 n 有 $F_n \leqslant_{\rm SL} G_n$, 则取 $U(\cdot)$ 为 N 的分布函数得 $X \leqslant_{\rm SL} Y$. 事件 $N=n$ 可表示某个理赔的特征.

2. 特别取 $F_n(x)=F^{*n}$, $G_n(x)=G^{*n}$, 其中 F 和 G 分别为单一理赔 X_i 和 Y_i 的分布函数. 如果 $F \leqslant_{\rm SL} G$, 则 $X_1+\cdots+X_N \leqslant_{\rm SL} Y_1+\cdots+Y_N$. 因此,停止损失序在复合运算下是封闭的.

3. 如果 Λ 是一个结构变量,具有分布函数 U, 给定事件 $\Lambda=\lambda$, $X\sim F_\lambda$ 和 $Y\sim G_\lambda$, 则 $F_\lambda \leqslant_{\rm SL} G_\lambda$ 对所有 λ 成立蕴涵 $X \leqslant_{\rm SL} Y$.

4. 设 F_λ 为退化随机变量 $E[X|\Lambda=\lambda]$ 的分布函数, G_λ 为给定 $\Lambda=\lambda$, X 的条件分布函数. 则易知 $F_\lambda \leqslant_{\rm SL} G_\lambda$. 函数 $\int_{\Re}F_\lambda(x)dU(\lambda)$ 是随机变量 $E[X|\Lambda]$ 的分布函数,而 $\int_{\Re}G_\lambda(x)dU(\lambda)$ 是 X 的分布函数. 因此 $E[X|\Lambda] \leqslant_{\rm SL} X$ 对所有的 X 和 Λ 皆成立. 一个随机变量的条件均值危险性总是小于原随机变量. ∇

可见,在停止损失序意义下,如果一个复合和中每项替换成较大的,则复合和也相应变大. 当复合中理赔次数 M 替换成在停止损失序意义下较大的 N 时,相同的结论也成立,但证明要稍困难些. 因此,我们先考虑一个特殊的情形:取 $M\sim$ Bernoulli(q), $E[N]\geqslant q$. 按习惯,当 $n=0$ 时,定义 $\sum_{i=1}^n x_i=0$.

定理 10.3.14(与一个更危险的理赔次数复合,1) 如果 $M\sim$ Bernoulli(q), N 为一个记数随机变量满足 $E[N]\geqslant q$, 且 $X_1,X_2,\cdots$ 是风险 X 的独立拷贝,则

$$MX \leqslant_{\rm SL} X_1+X_2+\cdots+X_N. \tag{10.8}$$

证明 首先证明对每个 $d\geqslant 0$, 下面事件概率 1 成立:

$$(X_1+\cdots+X_n-d)_+ \geqslant (X_1-d)_+ + \cdots + (X_n-d)_+. \tag{10.9}$$

这只要考虑上式右端非零情形. 不妨设右端第一项为正, 因为 $X_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots$, 所以 (10.9) 中前两个 $(\cdot)_+$ 算子符号可以去掉, 即 (10.9) 此时等价于

$$X_2 + \cdots + X_n \geqslant (X_2 - d)_+ + \cdots + (X_n - d)_+, \tag{10.10}$$

而这当 $X_i \geqslant 0, i = 2, 3, \cdots$ 时对任意 $d \geqslant 0$ 总是成立的. 记 $q_n = \Pr[N = n]$, 利用 (10.9) 得对任意 $d \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
&E[(X_1 + X_2 + \cdots + X_N - d)_+] \\
= &\sum_{n=1}^{\infty} q_n E[(X_1 + X_2 + \cdots + X_n - d)_+] \\
\geqslant &\sum_{n=1}^{\infty} q_n E[(X_1 - d)_+ + (X_2 - d)_+ + \cdots + (X_n - d)_+] \\
= &\sum_{n=1}^{\infty} n q_n E[(X - d)_+] \geqslant q E[(X - d)_+] = E[(MX - d)_+].
\end{aligned} \tag{10.11}$$

最后一个不等式成立是因为由假设条件知 $\sum_n n q_n \geqslant q$. ▽

定理 10.3.15(与一个更危险的理赔次数复合, 2) 如果记数随机变量 M 和 N 满足 $M \leqslant_{\mathrm{SL}} N$, $X_1, X_2, \cdots$ 是风险 X 的独立拷贝, 则 $X_1 + X_2 + \cdots + X_M \leqslant_{\mathrm{SL}} X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

证明 这只需证明 $f_d(n) = E[(X_1 + \cdots + X_n - d)_+]$ 是关于 n 的单调增凸函数, 因为若此性质成立, 则根据定理 10.3.8 得 $E[f_d(M)] \leqslant_{\mathrm{SL}} E[f_d(N)]$ 对所有 d 成立, 即 $X_1 + \cdots + X_M \leqslant_{\mathrm{SL}} X_1 + \cdots + X_N$. 因为 $X_{n+1} \geqslant 0$, 显然有 $f_d(n+1) \geqslant f_d(n)$, 所以 $f_d(n)$ 单调增. 为证凸性, 我们需证明 $f_d(n+2) - f_d(n+1) \geqslant f_d(n+1) - f_d(n)$ 对每个 n 成立. 通过对随机变量 X_{n+1}, X_{n+2} 和 $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 取期望, 可知为证上不等式成立, 只需证明对所有 $d \geqslant 0$ 和 $x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n+2$,

$$(s + x_{n+1} + x_{n+2} - d)_+ - (s + x_{n+1} - d)_+ \geqslant (s + x_{n+2} - d)_+ - (s - d)_+ \tag{10.12}$$

成立, 其中 $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. 如果 (10.12) 中间两项为 0, 则最后一项也为 0, 不等式成立. 如果 (10.12) 中间两项中至少有一项为正, 不妨设含 x_{n+1} 的一项为正, 则 (10.12) 左边第一项为正, 且当 $s \geqslant d$ 时左右两边相等, 当 $s < d$ 时易证左边小于右边. ▽

结合定理 10.3.12 和 10.3.15 得知: 如果在停止损失序意义下理赔次数, 或理赔额大小分布或二者同时替换为较大的, 则复合和会变得更危险.

注 10.3.16(泛函不变性) 类似于随机序 (见习题 §10.2 第 8 题), 停止损失序也有泛函不变性. 事实上, 如果 $f(\cdot)$ 和 $v(\cdot)$ 是非降凸函数, 则复合函数 $v \circ f$ 也

是非降凸的，于是立即得到 $X \leqslant_{\mathrm{SL}} Y$ 蕴涵 $f(X) \leqslant_{\mathrm{SL}} f(Y)$. 该结论对两类最重要的再保险成立：超额损失再保险 ($f(x)=(x-d)_+$), 比例再保险 ($f(x)=\alpha x$, 其中 $\alpha>0$). ▽

§ 10.4 应 用

本节将给出风险排序理论在精算中的几个重要应用.

例 10.4.1(个体与聚合模型) §3.7 描述了如何在个体风险模型中，把第 i 个保单理赔替换为与之独立同分布的 N_i 个保单理赔之和，从而导出聚合模型，其中 $N_i \sim \mathrm{Poisson}(1)$, 见习题 §3.7 第 3 题. 在定理 10.3.14 中取 $q=1$, 可以立即看到我们事实上把每份保单的理赔替换为危险性更大的一个随机变量. 因此，如果把所有这些假设为相互独立的保单加起来，那么对于这个总体的组合来说，其总理赔分布的危险性更大，这是因为停止损失序对于卷积运算是封闭的 (见定理 10.3.11).

作为经典聚合模型的一个替代，注 3.7.2 引入了 *开放* 的聚合模型. 若保单 i 的理赔额是 I_ib_i, 其中 b_i 是固定的风险值， $I_i \sim \mathrm{Bernoulli}(q_i)$, 则该保单在聚合模型中所对应的项是 M_ib_i, 其中 $M_i \sim \mathrm{Poisson}(q_i)$; 而在开放的聚合模型中，此项变为 N_ib_i, 其中 $N_i \sim \mathrm{Poisson}(t_i)$, $t_i=-\log(1-q_i)$. 注意到 $I_i \leqslant_{\mathrm{st}} N_i$, 所以在开放模型中，每个保单已被替换为复合 Poisson 分布，该复合分布对应的理赔次数变量随机大于个体模型中每个保单的理赔次数变量. 因此，开放模型不仅对于厌恶风险型的决策者来说不具备什么吸引力，甚至对于所有使用单调增效用函数的决策者群体来说，也没什么吸引力. 同样，对于这一决策者群体来说，他们更偏好于经典的聚合模型甚于开放模型. 在个体模型和聚合模型之间作选择的话，某些决策者可能会选择后者. 显然，这些决策者不总是厌恶风险的. ▽

例 10.4.2(破产概率与调节系数) §4.7 给出了非破产概率 $1-\psi(u)$ 可以写为复合几何随机变量 $L=L_1+L_2+\cdots+L_M$ 的分布函数，其中 M 服从参数 p 的几何分布，代表盈余的低记录值次数， L_i 代表相邻两个盈余低记录值的差， L 表示最大累积损失. 由 (4.50) 和 (4.51) 得

$$p=1-\psi(0)=\frac{\theta}{1+\theta} \quad \text{和} \quad f_{L_1}(y)=\frac{1-P(y)}{\mu_1},\ y>0. \tag{10.13}$$

这里 θ 是相对安全附加系数， $P(y)$ 是破产过程中的理赔额大小分布. 现在，假设用分布函数 Q 取代 P, 这里 $P \leqslant_{\mathrm{SL}} Q$ 且 Q 和 P 的均值相等. 由于分布 Q 的停止损失保费大于分布 P 的停止损失保费，所以由 (10.13) 显然可见，当 P 用 Q 取代之后，概率 $\Pr[L_1>y]$ 变大. 这就意味着，我们得到了一个新的复合几何分布，其几何分布参数 p 不变 (这是因为 μ_1 和 θ 不变), 但复合和中的每一项 L_i 随机地变

大，这就使得 L 的分布函数变小，从而破产的概率更大. 注意，这里 P 和 Q 的均值相同是关键，它保证了 p 保持不变，且随机变量 L_1 随机增大.

现在，进一步假设用分布函数 R 替换理赔额大小分布 Q, 其中 $Q \leqslant_{\rm st} R$, 而保费水平 c 维持不变. 这就意味着我们用另一个过程代替这个破产过程，新过程单位时间收取的保费以及理赔次数过程与原破产过程的对应相同，但理赔额变 "大". 由注 10.2.4, 不失一般性，我们认为每一次理赔以概率 1 取较大的值，而不是随机大. 这样做的结果是，在任意时刻 t, 新的盈余 $U_R(t)$ 以概率 1 不超过原盈余 $U_Q(t)$. 这也就蕴涵了对于破产概率，我们有 $\psi_R(u) \geqslant \psi_Q(u)$. 可能发生的情况是在 R- 过程中发生破产，但在 Q- 过程中不会. 考虑分离定理 10.3.7, 当 R 取代 P 且 $P \leqslant_{\rm SL} R$ 时，我们总可以找到一个界于 P 和 R 之间的分布 Q, 其均值等于 P 的均值，且有 $P \leqslant_{\rm SL} Q \leqslant_{\rm st} R$. 由此可见，只要把理赔额分布替换为在停止损失意义下更大的分布，那么对于任意的初始资本 u 破产概率都会变大.

从图 4.2 可以直接看到，当理赔额的矩母函数被一个在 $(0,\infty)$ 上更大的随机变量的矩母函数所取代时，对应的调节系数 R 将变小. 当把理赔额分布替换为在指数序意义下更大的分布时，情况也是如此 (见注 10.3.10). 把理赔额分布替换为在停止损失序意义下更大的分布，破产概率会增大. 但要使 Lundberg 指数上界变大，换为指数序意义下更大的分布就可以了.

我们已看到，在停止损失序意义下更大的理赔会导致更大的破产概率. 相比之下，较弱一些的指数序并不能推出这个结论. 为给出反例，首先注意到存在这样的一对满足指数序的随机变量，其均值和方差都分别相等. 例如 $\Pr[X = 0,1,2,3] = \frac{1}{3},0,\frac{1}{2},\frac{1}{6}$ 和 $Y \sim 3 - X$, 见习题 §10.4 第 10 题. 现在，如果 $\psi_X(u) \leqslant \psi_Y(u)$ 对于所有的 u 成立，且严格不等号对某个 u 成立，那么最大的总损失 L_X 和 L_Y 分布函数不会相交，因此 $L_X \leqslant_{\rm st} L_Y$. 这就蕴涵了 $E[L_X] < E[L_Y]$. 但这是不可能的，因为

$$
\begin{aligned}
E[L_X] &= E[M]E[L_i^{(X)}] = E[M]\int E[(X-x)_+]dx \Big/ E[X] \\
&= E[M]\,\frac{1}{2}E[X^2]\Big/ E[X] \\
&= E[M]\,\frac{1}{2}E[Y^2]\Big/ E[Y] = \cdots = E[L_Y].
\end{aligned}
\tag{10.14}
$$

如果这两个破产概率函数相等，那么 L_X 和 L_Y 的矩母函数相等，因而 $L_i^{(X)}$ 和 $L_i^{(Y)}$ 的矩母函数也相等，见 (4.55). 再由 (4.51), 理赔额分布也是相等的. ∇

例 10.4.3(伽玛分布族中的序)　伽玛分布是用来拟合单一保单理赔额大小的重要模型，例如汽车损失险，见第 8 章. 给定两个参数分别为 (α_0,β_0) 和 (α_1,β_1) 的伽玛分布，很容易比较其均值和方差. 但是，对于这样的两个分布，能否进一步的判断它们之间的排序关系，如某种尾概率或停止损失保费？

通常，当我们考虑伽玛分布时，总是会想到其密度函数图像是众数为正值且单峰的，看起来有点像倾斜的正态密度函数图形．但如果形状参数 $\alpha = 1$, 我们就得到指数分布，其密度函数单峰且众数为 0. $\Gamma(\alpha,\beta)$ 的众数为 $(\alpha-1)_+$, 其偏度为 $2/\sqrt{\alpha}$. 因此，伽玛分布当 $\alpha < 1$ 时其偏度大于指数分布，有较大的尾概率.

从伽玛分布的矩母函数 $m(t;\alpha,\beta) = (1-t/\beta)^{-\alpha}$ 出发，可以证明伽玛随机变量关于 α 是可加的．因为 $m(t;\alpha_1,\beta)m(t;\alpha_2,\beta) = m(t;\alpha_1+\alpha_2,\beta)$, 所以如果 X 和 Y 是相互独立的伽玛随机变量，并且具有共同的参数 β, 那么 X 和 Y 的和也是一个伽玛随机变量．如果 $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$, 则由 $E[e^{t(\beta X)}] = (1-t)^{-\alpha}$ 得 $\beta X \sim \Gamma(\alpha,1)$. 从这个意义上看，伽玛分布对于刻度参数 β 来说，是可相乘的．由这两个性质，立即可以得到：$\Gamma(\alpha,\beta)$ 随机变量当 α 用 $\alpha+\varepsilon$ 来替换时变“大”, 而当 β 替换为 $\beta(1+\varepsilon)$ 时变“小”, 其中 $\varepsilon > 0$. 因此，伽玛分布关于这两个参数在随机序意义下具有单调性，见习题 §10.2 第 2 题.

现在比较 $\Gamma(\alpha_1,\beta_1)$ 与 $\Gamma(\alpha_0,\beta_0)$ 分布，已知它们的均值相等，即 $\alpha_1/\beta_1 = \alpha_0/\beta_0$. 设 $\alpha_1 < \alpha_0$, 则也有 $\beta_1 < \beta_0$. 通过研究伽玛分布的密度函数，我们将证明方差更大的分布，其危险性更高．这个结论成立的一个充分条件是这两个密度函数恰好交叉两次．考虑这两个密度函数的比值 (其中符号 $\propto$ 表示正比于，即该符号的左右两边相差一个不依赖于 x 的常数乘积因子)

$$\frac{\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\beta_1^{\alpha_1}x^{\alpha_1-1}e^{-\beta_1 x}}{\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\beta_0^{\alpha_0}x^{\alpha_0-1}e^{-\beta_0 x}} \propto x^{\alpha_1-\alpha_0}e^{-(\beta_1-\beta_0)x} = (x^{\mu}e^{-x})^{\beta_1-\beta_0}. \tag{10.15}$$

$x^{\mu}e^{-x}$ 的导函数当 $0 < x < \mu$ 时为正，而当 $x > \mu$ 时为负，所以比值 (10.15) 穿过任意水平线至多两次．注意到因为两个密度函数有相同的均值，所以两者间不存在随机序关系，这就意味着它们的相交次数必须大于 1. 因此，它们恰好相交两次，这表明其中的一个随机变量比另一个随机变量更危险．通过进一步观察哪个密度函数在何处比另一个密度函数大，可以找出危险性更大的随机变量．但这里我们已经知道哪一个随机变量的危险性更大，因为这个危险性更大的随机变量必然是方差较大的一个，对应的参数为 α_1,β_1.

可以得出这样的结论：在 (α,β) 平面，从 (α_0,β_0) 出发沿着对角线往原点走，参数对应的分布危险性递增．从图 10.2 也可以看到，如果从点 (α_0,β_0) 出发，先沿着对角线朝原点方向移动至某点，再向右或向下移动可以到达点 (α,β), 则 (α,β) 对应分布在停止损失序意义下较大，因为这个分布随机大于一个危险性高于参数 (α_0,β_0) 对应的分布．从图 10.2 可以看到，位于 (α_0,β_0) 右下方四分之一区域参数所对应的分布随机大于 $\Gamma(\alpha_0,\beta_0)$; 位于 (α_0,β_0) 左上方的四分之一区域参数所对应的分布随机小于 $\Gamma(\alpha_0,\beta_0)$；位于 (α_0,β_0) 左下方对角线之下的八分之一区域所对应的分布在停止损失序意义下大于 $\Gamma(\alpha_0,\beta_0)$; 而左下方的对角线之上的八分之一区域所对应的分布，其均值较之 $\Gamma(\alpha_0,\beta_0)$ 更低，但当 $d \to \infty$ 时停止损失保费较之

$\Gamma(\alpha_0,\beta_0)$ 为更高. 后者可以通过两次应用洛比达法则得出. 因此, 厌恶风险型决策者对风险决策有不同的意见, 见习题 §10.4 第 8 题. ∇

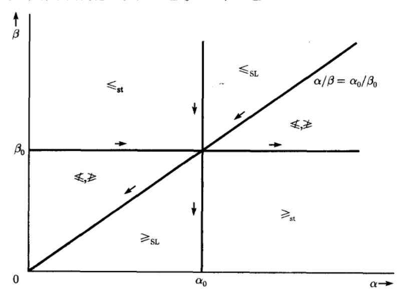


图 10.2　$\Gamma(\alpha,\beta)$ 分布的序. 箭头方向表示在 $\leqslant_{\rm SL}$ 序意义下单调增

例 10.4.4(最优再保险)　定理 1.4.1 已证明, 对于所有赔偿额均值相等的再保保单来说, 停止损失再保险形式使得保险人自留风险的方差达到最小. 假设损失等于随机变量 X, 若采用停止损失再保险形式, 则保险人的自留风险为 $Z=X-(X-d)_+$; 若采用其它再保险形式 $I(X)$, 则保险人的自留风险为 $Y=X-I(X)$. 现假设 $E[Y]=E[Z]$, 欲比较 Y 和 Z 的分布函数. 假设函数 $I(\cdot)$ 非负, 则 $Y\leqslant X$ 成立, 因此 $F_Y(x)\geqslant F_X(x)$ 对于所有的 $x>0$ 成立. 进一步, 注意到 $Z=\min\{X,d\}$, 所以当 $x<d$ 时有 $F_Z(x)=F_X(x)$, 当 $x\geqslant d$ 时 $F_Z(x)=1$. 显然, Z 和 Y 的分布函数恰好于 d 点交叉一次, 所以 Y 的危险性较高, 即 $Z\leqslant_{\rm SL}Y$.

由此可得出很多结论. 首先, 对于每一凹的递增效用函数 $u(\cdot)$, 有 $E[u(-Z)]\geqslant E[u(-Y)]$. 特别, $\mathrm{Var}[Y]\geqslant\mathrm{Var}[Z]$, 于是定理 1.4.1 可以立即得到. 我们还可以得到, 对于单独的理赔, 超额损失再保险比与之均值相等的任何形式再保险都更有效. 注意这些结论的成立关键要依赖于一个前提: 不同再保形式的保费数量仅依赖于理赔额的均值. ∇

例 10.4.5(在停止损失序意义下更大的理赔是否需要更多的保费?)　如果损失 X 在停止损失序意义下小于 Y, 那么所有厌恶风险型决策者都偏好于损失 X. 这是否意味着 X 所对应的保费就偏低呢?

令人吃惊的是, 这个问题的答案不总是肯定的. 例如, 考虑标准差保费准则 (见第 5 章), X 的保费为 $\pi[X]=E[X]+\alpha\sqrt{\mathrm{Var}[X]}$. 如果 $X\sim\mathrm{Bernoulli}(\frac{1}{2})$, $Y\equiv 1$, 而

$\alpha > 1$, 则尽管 $\Pr[X \leqslant Y] = 1$, 但 X 对应的保费大于 Y 对应的保费.

零效用保费，包括指数保费，都遵循停止损失序关系. 为证明此结论，注意到风险 X 的保费 $\pi[X]$ 可通过求解效用均衡方程 (1.11) 得到，亦即

$$E[u(w + \pi[X] - X)] = u(w). \tag{10.16}$$

此处效用函数 $u(\cdot)$ 是厌恶风险型的， w 是当前财富. 如果 $X \leqslant_{\rm SL} Y$, 则 $E[u(w + \pi[Y] - X)] \geqslant E[u(w + \pi[Y] - Y)] = u(w)$. 因为 $E[u(w + P - X)]$ 关于 P 单调增，且 $E[u(w + \pi[X] - X)] = u(w)$, 所以 $\pi[X] \leqslant \pi[Y]$. ∇

例 10.4.6(泊松分布的混合) 第 7 章在风险参数非齐次性的假定之下，用混合泊松分布为汽车保险理赔次数建模. 例如，从 (7.53) 中可以看到估计出的结构函数是以 $\overline{x}$ 为均值，但我们可以用不同于 (7.54) 的方法估计参数 α. 如果结构分布用一个危险性更高的分布代替，则模型的不确定性会增加. 这样所得到的边际理赔次数分布是否也是在停止损失序意义下更大呢？

这个问题的部分答案可以由前面提过的一些事实来解释. 首先，由例 3.3.1 知泊松分布的伽玛混合结果是一个负二项分布. 习题 §10.3 第 9 题给出，负二项分布在停止损失序意义下大于均值与之相同的泊松分布. 因此，泊松分布的 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 混合在停止损失意义下大于均值为 $\mu = \alpha/\beta$ 的泊松分布. 为给出更一般的解答，首先引入一些记号. 假设结构变量为 $\Lambda_j, j = 1, 2$, 且给定 $\Lambda_j = \lambda$ 时，随机变量 N_j 具有 Poisson(λ) 分布. 设 W_j 为 Λ_j 的分布函数. 我们欲证明 $W_1 \leqslant_{\rm SL} W_2$ 蕴涵 $N_1 \leqslant_{\rm SL} N_2$. 为此，引进函数 $f_d(\lambda) = E[(M_\lambda - d)_+]$, 其中 $M_\lambda \sim$ Poisson(λ). 则 $N_1 \leqslant_{\rm SL} N_2$ 当且仅当 $E[f_d(\Lambda_1)] \leqslant E[f_d(\Lambda_2)]$ 对任意 d 成立. 因此，剩下要做的就是证明函数 $f_d(\lambda)$ 是单调增凸函数，即证 $f_d'(\lambda)$ 非负且关于 λ 单调增. 这个证明是很直接的:

$$\begin{aligned} f_d'(\lambda) &= \sum_{n>d}(n-d)\frac{d}{d\lambda}\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \sum_{n>d}(n-d)\left(\frac{\lambda^{n-1}e^{-\lambda}}{(n-1)!} - \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\right) \\ &= f_{d-1}(\lambda) - f_d(\lambda) = \int_{d-1}^{d}[1 - F_{M_\lambda}(t)]dt. \end{aligned} \tag{10.17}$$

最后一个表达式非负，且关于 λ 单调增，因为当 $\lambda < \mu$ 时有 $M_\lambda \leqslant_{\rm st} M_\mu$. ∇

例 10.4.7(风险的分散) 假设一个投资者可以把资金 1 投资于 n 种可能的基金，这些基金每股产生 iid 的收益 G_i. 如果投资目标是使期望效用最大，那么从基金 i 购买份额 p_i 应该如何选择？

假定财富的效用是通过风险厌恶型函数 $u(\cdot)$ 来衡量. 我们欲求解如下带约束的优化问题:

$$\max_{p_1,\cdots,p_n} E\left[u\left(\sum_i p_i G_i\right)\right] \quad 满足 \ \sum_i p_i = 1. \tag{10.18}$$

以下证明 $p_i=\frac{1}{n}, i=1,2,\cdots,n$, 是最优的. 为此, 记 $A=\frac{1}{n}\sum_i G_i$. 利用对称性及 $\sum_i E[G_i|A]\equiv E[\sum_i G_i|A]\equiv nA$, 可得 $E[G_i|A]\equiv A$. 这蕴涵了

$$E\left[\sum_i p_iG_i|A\right]\equiv\sum_i p_iE[G_i|A]\equiv\sum_i p_iA\equiv A. \tag{10.19}$$

根据推论 10.3.13(4), 得 $E[\sum_i p_iG_i|A]\leqslant_{\mathrm{SL}} E[\sum_i p_iG_i]$. 因为 $u(\cdot)$ 是凹函数, 所以当 $p_i=\frac{1}{n}, i=1,2,\cdots,n$, 时, (10.18) 达到最大. ▽

注 10.4.8(Rao-Blackwell 定理)　"条件均值 $E[Y|X]$ 的危险性小于 Y" 这一结论是 Rao-Blackwell 定理的理论基础. 该定理可以在数理统计教科书中找到, 意思是如果 Y 是某个参数的无偏估计, 则 $E[Y|X]$ 是一个更好的无偏估计, 此处假定 $E[Y|X]$ 是一个统计量, 即不含未知参数. 在事件 $X=x$ 上, Y 的条件分布的概率质量堆积于条件均值 $E[Y|X=x]$ 附近, 使得发散程度变低, 因而是一个较好的估计量. ▽

注 10.4.9(多个相同风险的变换)　考虑一个 iid 风险序列 $X_1,\cdots,X_n$ 和非负函数 $\rho_i, i=1,\cdots,n$. 则可以证明

$$\sum_{i=1}^n\overline{\rho}(X_i)\leqslant_{\mathrm{SL}}\sum_{i=1}^n\rho_i(X_i),\quad 其中\quad \overline{\rho}(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\rho_i(x). \tag{10.20}$$

该不等式表明, 给定相同的风险并对每个风险作变换, 为使变换后风险之和危险性较低, 应该对所有的风险作相同的变换. 为证 (10.20), 以 V 和 W 分别记 (10.20) 中右端和左端的随机变量, 先证 $W\equiv E[V|W]$, 然后应用结论 $E[V|W]\leqslant_{\mathrm{SL}} V$ 即可 (见推论 10.3.13(4)). 显然,

$$E\left[\sum_{i=1}^n\rho_i(X_i)\middle|\sum_{i=1}^n\overline{\rho}(X_i)\right]\equiv\sum_{i=1}^n E\left[\rho_i(X_i)\middle|\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\sum_{l=1}^n\rho_k(X_l)\right]. \tag{10.21}$$

由对称性, 在上式右端把 X_i 换成任意 X_j 结论依然成立. 因此

$$\sum_{i=1}^n E\left[\rho_i(X_i)\middle|\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\sum_{l=1}^n\rho_k(X_l)\right]\equiv\sum_{i=1}^n E\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\rho_i(X_j)\middle|\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\sum_{l=1}^n\rho_k(X_l)\right]. \tag{10.22}$$

最后一个表达式可写成

$$E\left[\sum_{i=1}^n\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\rho_i(X_j)\middle|\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\sum_{l=1}^n\rho_k(X_l)\right]\equiv\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\sum_{l=1}^n\rho_k(X_l)\equiv\sum_{l=1}^n\overline{\rho}(X_l). \tag{10.23}$$

于是证得 $W\equiv E[V|W]$, 所求的停止损失不等式 (10.20) 由推论 10.3.13 立即得到. ▽

注 10.4.10(大数律与停止损失序) 弱大数律表明，对任意均值为 μ, 方差为 σ^2 的 iid 观察值序列 $X_1, X_2, \cdots \sim X$, 样本均值 $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 弱收敛于 μ, 即对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$, 当 $n > \sigma^2/\varepsilon^2\delta$ 时，有

$$\Pr[|\overline{X}_n - \mu| < \varepsilon] \geqslant 1 - \delta. \tag{10.24}$$

在停止损失序意义下，可以证明

$$\overline{X}_1 \geqslant_{\mathrm{SL}} \overline{X}_2 \geqslant_{\mathrm{SL}} \cdots \geqslant_{\mathrm{SL}} \mu. \tag{10.25}$$

因此具有共同均值 μ 的样本均值 $\overline{X}_n$, 其危险性单调递减. 当 $n \to \infty$ 时，停止损失保费 $E[(\overline{X}_n - d)_+]$ 收敛于 $(\mu - d)_+$, 而后者是退化随机变量 μ 的停止损失保费. (10.25) 的证明从注 10.4.9 中立即得到，只要取 $\rho_i(x) = \frac{x}{n-1}, i = 1, \cdots, n-1$; $\rho_n(x) \equiv 0$, 进而有 $\overline{\rho}(x) = \frac{x}{n}$. ∇

§ 10.5 不完全信息

本节研究，当对风险 Y 的分布 $F_Y(\cdot)$ 仅有有限信息时，如何确定免赔额为 d 的停止损失保费. 通常，可以根据过去的经验、保单情况或由经营的特定再保险业务，确定该风险的一个实际的上限. 因此，本节假设对于理赔 Y, 我们已知其上限 b, 并且假定对其均值 μ 或有时方差 σ^2 有一个好的估计. 有时这些值在再保险条款中是事先规定好了的. 可以想像得出，我们由情景分析已推出均值和方差. 例如，根据有关反映灾难性洪水和飓风发生次数的模型，可以算出理赔支付的样本均值和样本方差. 精算师不仅仅只是一位统计工作者，他们在利用这些数据计算保费时，是基于最坏的情况来考虑的，即给定 μ, σ^2 和上限 b, 选择这样的分布使其停止损失保费尽可能达到最大.

例 10.5.1(分散和集中) 具有给定上限 b 和均值 μ 的风险 Y 类，含有一个最危险的元素 Z, Z 是如下定义的：

$$\Pr[Z = b] = 1 - \Pr[Z = 0] = \frac{\mu}{b}. \tag{10.26}$$

该随机变量 Z 有均值 μ 和上限 b, 因此它属于所有风险 Y 组成的一个类. 显然，如果 Y 也属于这个风险类，则 Y 与 Z 的分布函数恰好交叉一次 (见图 10.3), 因此 $Y \leqslant_{\mathrm{SL}} Z$. Z 的分布可以通过把 Y 于 $[0, b]$ 上的概率质量重新分散到边界点 0 和 b 上而得到. 随机变量 Z 取值的分散程度强于任何一个具有同样均值和上限的其它随机变量. 对于每一个免赔额 d, 随机变量 Z 具有最大可能的停止损失保费 $E[(Z - d)_+]$. 显然，Z 的方差 $\mathrm{Var}[Z]$ 也是最大的，因为 Z 的危险性高于其它任何可行的风险，这也可以直接证明，因为 $E[Y^2] \leqslant E[bY] = b\mu = E[Z^2]$.

另一方面，上面的风险类也含有一个分散程度最低的随机变量. 该变量把所有的概率堆积于 μ 点. 如果 $X \equiv \mu$, 则 $X \leqslant_{\mathrm{SL}} Y$ (见图 10.3). 对于每一免赔额 d, X 的停止损失保费最小，其方差也是最小的. 在实际中，人们对最小停止损失保费的确定问题不是很感兴趣. 因此，后面将着重讨论最大停止损失保费问题.

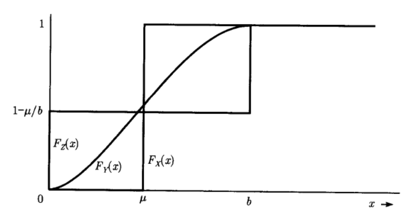


图 10.3 通过 分散 与 集中 产生的最危险和最不危险分布函数，两者具有给定的均值 μ 和取值范围 $[0,b]$

注意，如果风险 X 和 Y 具有相同的均值和方差，那么二者之间不可能存在停止损失序关系，因为它们的停止损失变换必须至少交叉一次. 事实上，由 (3.83) 得，如果 $\pi_Y(d) \geqslant \pi_X(d)$ 对于所有 d 成立，则 $\mathrm{Var}[X] < \mathrm{Var}[Y]$ 或 $X \sim Y$.

我们也可以对某个区间上的概率质量分别作分散与集中，这样可以导出在停止损失序意义下更大和更小的分布，见习题 §10.5 第 5 题和第 6 题. ∇

注 10.5.2(复合分布与破产过程) 在例 10.5.1 中，我们已找到一个在停止损失序意义下最小的风险 X 和最大的风险 Z. 因此，$X \leqslant_{\mathrm{SL}} Y \leqslant_{\mathrm{SL}} Z$, 这意味着对复合分布也有这样的结果. 例如，如果 $X_i \equiv \mu$, 则 $X_1 + \cdots + X_N \leqslant_{\mathrm{SL}} Y_1 + \cdots + Y_N$. 如果由 (10.26) 定义的 Z 分布是一个破产过程中理赔额大小分布，那么对于任意初始资金 u, 对应的破产概率都是最大的. 注意这样得出来的破产过程，其理赔额为 0 或 b，这实际上对应于一个仅有一种理赔额可能发生的破产过程. ∇

现在，进一步假设方差 σ^2 也是已知的. 首先注意到要使可行的分布存在，必须满足下面的条件：

$$0 \leqslant \mu \leqslant b, \quad 0 \leqslant \sigma^2 \leqslant \mu(b-\mu). \tag{10.27}$$

前三个不等号显然成立. 最后一个不等号说明，σ^2 不超过例 10.5.1 中 Z 的方差，前面已证得 Z 在具有给定均值和取值范围的风险类中危险性最大. 假设 (10.27) 的不等式是严格成立的，以使得可行的分布不止一个.

后面将证明，如果一个随机变量 Y 的停止损失保费于 d 达到最大，则其支撑集仅由两个点组成，并且支撑集中的元素取决于具体的 d 值. 因此，不可能像前面方差未确定情形下那样，导出复合停止损失保费和破产概率的可达到的上界. 我们首先研究具有均值 μ 和方差 σ^2 的两点分布.

引理 10.5.3(具有给定均值与方差的两点分布)　假设一个随机变量 T 满足 $E[T]=\mu$, $\mathrm{Var}[T]=\sigma^2$, 其支撑集为 $\{r,\bar{r}\}$, 但不一定满足 $\Pr[0\leqslant T\leqslant b]=1$. 则 r 和 $\bar{r}$ 有如下关系：

$$\bar{r}=\mu+\frac{\sigma^2}{\mu-r}. \tag{10.28}$$

证明　显然，$E[(T-\bar{r})(T-r)]=0$. 这蕴涵

$$0=E[T^2-(r+\bar{r})T+r\bar{r}]=\mu^2+\sigma^2-(r+\bar{r})\mu+r\bar{r}. \tag{10.29}$$

对给定的 r, 可以解出 $\bar{r}$, 其满足 (10.28).　∇

因此，对于任意给定的 r, $\bar{r}$ 表示唯一可以与 r 一起构成某个随机变量支撑集的点，使得该变量的均值为 μ 和方差为 σ^2. 注意特殊的点 $\bar{0}$ 和 $\bar{b}$. 概率 $p_r=\Pr[T=r]$ 可以如下唯一确定

$$p_r=\frac{\mu-\bar{r}}{r-\bar{r}}=\frac{\sigma^2}{\sigma^2+(\mu-r)^2}. \tag{10.30}$$

这意味着，恰好有一个两点分布，其支撑集含有 $r\neq\mu$. 由 r 到 $\bar{r}$ 对应的函数具有以下性质：

$$\begin{aligned}&\overline{(\bar{r})}=r;\\&\text{当 } r\neq\mu \text{ 时, } \bar{r} \text{ 关于 } r \text{ 单调增;}\\&\text{若 } r<\mu, \text{ 则 } \bar{r}>\mu.\end{aligned} \tag{10.31}$$

所以如果 $\{r,s\}$ 和 $\{u,v\}$ 是两个可能的只含两点的支撑集，满足 $r<s$, $u<v$ 和 $r<u$, 则 $r<u<\mu<s<v$. 因为这两个分布有相同的均值和方差，所以它们的停止损失变换必须至少交叉一次，分布函数至少交叉两次，密度函数交叉三次或更多次.

在寻找最大停止损失保费过程中，我们证明了对于任意免赔额 d, 最大停止损失保费不可能由多于两点的支撑集对应的某个分布得到. 为证明此结论，假设某一可行分布的支撑集是 $\{a,c,e\}$, 其中 $0\leqslant a<c<e\leqslant b$. 可以验证 $c\leqslant\bar{a}\leqslant e$, $a\leqslant\bar{e}\leqslant c$. 从停止损失变换的图形上看 (见图 10.4), 在区间 $(-\infty,c]$, 支撑集 $\{a,\bar{a}\}$ 对应的两点分布，其停止损失保费至少等于支撑集为 $\{a,c,e\}$ 的分布所对应的停止损失保费；而在 $[c,\infty)$, 对于支撑集为 $\{e,\bar{e}\}$ 的两点分布，结论同样成立. 类似，含 n 个点的支撑集对应分布的停止损失保费不超过某个含 $n-1$ 个点的支撑集对应分布的停止损失保费. 为说明原因，令 a, c 和 e 是这支撑集 n 个点中的最后三

个点. 结论是免赔额为 d 的最大停止损失保费只能由含两点的支撑集对应的分布达到.

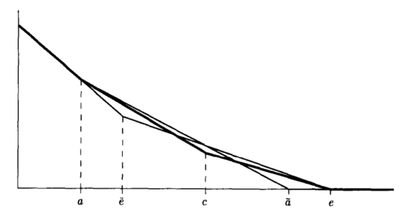


图 10.4　"3 点分布的停止损失保费不可能达到最大" 的证明. 对每个免赔额, 支撑集 $\{a, \bar{a}\}$ 或 $\{\bar{e}, e\}$ 对应的两点分布其停止损失保费大于 3 点分布的停止损失保费

因此, 对于特定的 d, 为求这样的随机变量 X, $\Pr[0 \leqslant X \leqslant b] = 1$, $E[X] = \mu$, $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$, 使得 $E[(X-d)_+]$ 达到最大, 我们只需要考虑支撑集为 $\{c, \bar{c}\}$ 的两点分布. 注意, 当 $d < \bar{c} < c$ 或 $\bar{c} < c < d$ 时, 有 $E[(X-d)_+] = (\mu - d)_+$, 这事实上可能是最小的停止损失保费. 因此, 我们只需考虑 $c \geqslant d \geqslant \bar{c}$ 的情形. 首先, 忽略取值范围限制 $0 \leqslant \bar{c} < c \leqslant b$, 求解如下最大值问题:

$$\max_{c>\mu} E[(X-d)_+], \quad \text{其中 } \Pr[X=c] = \Pr[X \neq \bar{c}] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (c-\mu)^2}. \tag{10.32}$$

这等价于

$$\max_{c>\mu} \frac{\sigma^2(c-d)}{\sigma^2 + (c-\mu)^2}. \tag{10.33}$$

除以 σ^2 并对 c 求导得

$$\frac{d}{dc}\frac{c-d}{\sigma^2 + (c-\mu)^2} = \frac{(c-\mu)^2 + \sigma^2 - 2(c-d)(c-\mu)}{[\sigma^2 + (c-\mu)^2]^2}. \tag{10.34}$$

设分子等于 0 可得到一个 2 次方程

$$-c^2 + 2dc + \mu^2 + \sigma^2 - 2d\mu = 0. \tag{10.35}$$

当 $c > \mu > \bar{c}$ 时上方程的解为

$$c^* = d + \sqrt{(d-\mu)^2 + \sigma^2}, \quad \bar{c}^* = d - \sqrt{(d-\mu)^2 + \sigma^2}. \tag{10.36}$$

注意到 $d=\frac{1}{2}(c^*+\bar{c}^*)$. 如果忽略 $\Pr[0\leqslant X\leqslant b]=1$ 的限制, (10.36) 中数 c^* 和 $\bar{c}^*$ 构成了最优的两点支撑集. 加上这个限制, 我们就得考虑边界的极端情形. 因为 $0\leqslant\bar{c}$ 蕴涵 $\bar{0}\leqslant c$, 所以我们不再于 $c>\mu$ 上考虑最大化, 而是限定于 $\bar{0}\leqslant c\leqslant b$ 上最大化. 如果 $c>b$ 或等价地, $d>\frac{1}{2}(b+\bar{b})$, 则最优支撑集为 $\{b,\bar{b}\}$. 如果 $\bar{c}<0$, 进而 $d<\frac{1}{2}\bar{0}$, 则最优支撑集为 $\{0,\bar{0}\}$. 由以上的讨论, 我们可以建立如下关于能够导致最大停止损失保费的支撑集的定理. 证明留给读者自己完成.

定理 10.5.4(最大停止损失保费) 对任意 $\frac{1}{2}\bar{0}\leqslant d\leqslant\frac{1}{2}(b+\bar{b})$, 在所有具有给定均值 μ, 方差 σ^2 和取值上限 b 的风险中, 由 (10.36) 给出的 c 和 $\bar{c}$ 组成的支撑集, 其对应分布的停止损失保费达到最大. 当 $d>\frac{1}{2}(b+\bar{b})$ 时, 支撑集 $\{b,\bar{b}\}$ 对应分布有最大停止损失保费; 当 $d<\frac{1}{2}\bar{0}$ 时, 最优的支撑集为 $\{0,\bar{0}\}$. ∇

例 10.5.5(最小与最大停止损失保费) 图 10.5 绘出了当 $\mu=1$, $\sigma^2=2$ 和 $b=5$ 时最小和最大停止损失保费, 其中 $d\in[0,b]$. 可以看到, 最小可能的停止损失保费和最大可能的停止损失保费组成了一个凸的减函数, 因此两者都是某个风险的停止损失变换. 由图显然可以看出这二者满足均值为 μ, 上限为 b, 但方差不为 σ^2. 而且还可以看到, 没有一个分布函数能够一致地对应大的停止损失保费, 因为, 例如, 支撑集为 $\{0,\bar{0}\}$ 的风险当免赔额 d 较小时有最大的停止损失保费, 而当免赔额 $d>\bar{0}$ 时有最小的停止损失保费.

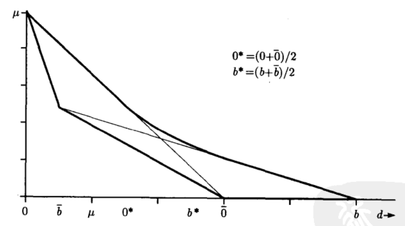


图 10.5 当 $\mu=1$, $\sigma^2=2$ 和 $b=5$ 时, 于自留额 d 的极端停止损失保费

再保险实务所关注的免赔额 d 都是很大的, 一般 $d>\mu+\sigma$. 可以证明, 如果 b 很小, 那么支撑集为 $\{b,\bar{b}\}$ 的分布所对应的停止损失保费在这些 d 上是最大的. 如果 $0<\frac{b-\mu}{\sigma}<1+\sqrt{2}$, 那么只要 $d>\frac{1}{2}(b+\bar{b})$ 和 $\mu+\sigma>\frac{1}{2}(b+\bar{b})$, 这个支撑集对应的分布就能得到最大的停止损失保费. 对此, 读者可以进行检验 (见习题 §10.5 第 8 题).

能得出最大停止损失保费的分布，其支撑集只含有两点集，其停止损失变换在 d 处与上限相切. 当 $d \leqslant \bar{b}$ 或 $d \geqslant \bar{0}$ 时，停止损失保费最小值为 $(\mu-d)_+$，且是可达的，对应分布的支撑集为 $\{d, \bar{d}\}$. 对于界于中间的 d 值，我们将指出最小停止损失保费 $l(d)$ 由支撑集为 $\{0, d, b\}$ 的分布达到. 在某种意义上，如果把边界点 0 和 b 各算作 1/2, 那么这些分布的支撑集也含有两个点. 边界点 0 和 b 各算作 1/2, 是因为边界点的位置是固定的，但联合概率可以自由选择. 在图 10.5 中，连接点 $(0,\mu)$, $(d, l(d))$ 和 $(b, 0)$ 所得到的停止损失变换 $\pi(\cdot)$ 对应的分布不仅恰好具有均值 $\pi(0)=\mu$, 上限正好也为 b, 因为 $\pi(b)=0$, 并且方差也等于 σ^2. 后者是因为停止损失变换下方的区域面积是风险的二阶矩的一半，也分别等于支撑集 $\{0, \bar{0}\}$ 和 $\{b, \bar{b}\}$ 对应分布的停止损失变换下方区域面积. 这可以利用由 $(b,0)$ 与 $(0,\mu)$ 连线作底的三角形面积推出. 注意 $l(d)$ 是于 d 点的最小停止损失保费，当 $h<\pi(d)$ 时，任何穿过点 (d,h) 的停止损失保费对应的分布其二阶矩必严格小于 $\mu^2+\sigma^2$. 当 $d \in (\bar{b}, \bar{0})$ 时，可以证明函数 $l(d)$ 同 $(b,0)$ 与 $(0,\mu)$ 两点的连线平行. ∇

注 10.5.6(相关问题) 其它这种类型的问题也已经得到解决. 当给定前四阶矩时，极端停止损失保费文献中有解析的结果，而当给定矩的个数大于 4 时，有具体的算法. 这些方法在实际中的合理性令人有些质疑，因为要对一个分布的矩作出可靠的估计，唯一的方法是要有很多观察值，而利用这些观察值，我们可以直接对停止损失保费作出估计. 当 Y 是单峰且有已知的众数 M 时，也有同样适用的结果，也可以计算极端停止损失保费和极端尾概率. ∇

例 10.5.7(Verbeek 不等式; 众数为 0) 设 Y 是一个单峰的风险，其均值为 μ, 取值上限为 b, 众数为 0. 由于 F_Y 于 $[0,b]$ 上为凹函数，所以 $2\mu \leqslant b$. 另一方面，设 X 和 Z 是风险，满足 $\Pr[Z=0]=1-2\frac{\mu}{b}$, 和

$$
\begin{aligned}
F_Z'(y) &= \frac{2\mu}{b^2}, \quad 0<y<b; \\
F_X'(y) &= \frac{1}{2\mu}, \quad 0<y<2\mu,
\end{aligned}
\tag{10.37}
$$

这两个函数于其它地方取值为 0. 则 X 和 Z 也是单峰的，众数也为 0, $E[X]=E[Y]=E[Z]$, 且 $X \leqslant_{\mathrm{SL}} Y \leqslant_{\mathrm{SL}} Z$ (见习题 §10.5 第 2 题). 因此，这类风险分别具有一致最小和一致最大的停止损失保费. 对应的结果也可扩展到复合分布和破产概率中去. ∇

§ 10.6 相依随机变量之和

为了能够对盈利和损失同时进行处理，我们首先延拓停止损失序的概念，以使在这种序意义下能够考虑更一般的既可能取负值，又可能取正值的随机变量，而不只局限于到现在为止考虑的非负随机变量. 接着提出并证明本节的核心结果，该结

果说明了当一个保单组合中各保单极大正相依时，该组合是最不被人们看好的 (最不具有吸引力). 最后给出一些例子说明如何运用该理论. 目前这个领域的很多研究仍在继续，有关结果足可以写成一本专著.

对于停止损失序，我们关心的是随机损失所取的较大值，并称随机变量 Y 不优于随机变量 X, 如果对任意 d, 有 $E(Y-d)_+ \geqslant E(X-d)_+$. 这些随机变量的负值实际上代表盈利. 但是别忘了稳定的重要性，过多的盈利在决策者看来也不是很好的事情，比如税收因素. 因此，只有当高值部分 $(X-d)_+$ 和低值部分 $(d-X)_+$ 的均值分别比 Y 的相应部分均值小时， X 才优于 Y. 这导致以下定义.

定义 10.6.1(凸序) 如果对每个 $d \in (-\infty, \infty)$,

$$E[(X-d)_+] \leqslant E[(Y-d)_+] \quad \text{和} \quad E[(d-X)_+] \leqslant E[(d-Y)_+] \tag{10.38}$$

成立，则称随机变量 X 在凸序意义下小于 Y, 记作 $X \leqslant_{\text{cx}} Y$. ∇

注意在第一个不等式两边加上 d 并令 $d \to -\infty$ 得 $E[X] \leqslant E[Y]$. 另一方面，在第二个不等式两边减去 d 并令 $d \to +\infty$ 可得 $E[X] \geqslant E[Y]$. 因此，对于两个满足凸序的随机变量 X 和 Y, 必有 $E[X] = E[Y]$. 同时，注意第一个不等式结合两变量均值相同的条件可以推出第二个不等式，因为 $E[(X-d)_+] - E[(d-X)_+] = E[X] - d$. 所以如果两个随机变量有相同均值，且停止损失保费有一致大小关系，则这两个变量之间有凸序关系，但均值不同的变量不可能满足凸序关系.

停止损失序等同于对所有的单调增凸函数 $f(\cdot)$, 期望值 $E[f(X)]$ 的排序 (见定理 10.3.8). 因此，该序代表所有风险厌恶型决策者的共同偏好. 另一方面，凸序等同于对于所有凸函数 $f(\cdot)$, 期望值 $E[f(X)]$ 的排序. 这也是凸序这个名称的由来. 在效用理论中，凸序代表风险厌恶型决策者对均值相等的随机变量的共同偏好. 要证明凸序蕴涵随机变量凸函数期望的排序，方法之一就是利用这样一个事实: 任何凸函数可以写成分段线性函数序列的一致极限，每一个线性函数可表示为函数 $(x-t)_+$ 和 $(t-x)_+$ 线性组合. 这也是文献中经常使用的方法. 更简单的方法是分步积分法，见下面定理的证明.

定理 10.6.2(凸序即随机变量凸函数期望的大小排序)

1. 如果 $X \leqslant_{\text{cx}} Y$, $f(\cdot)$ 为凸函数，则 $E[f(X)] \leqslant E[f(Y)]$.
2. 如果 $E[f(X)] \leqslant E[f(Y)]$ 对每个凸函数 $f(\cdot)$ 成立，则 $X \leqslant_{\text{cx}} Y$.

证明 先证第二个结论，考虑凸函数 $f(x) = x$, $f(x) = -x$ 和 $f(x) = (x-d)_+$, 其中 d 为任意. 由前两个函数得 $E[X] = E[Y]$, 由最后一个函数得 $E[(X-d)_+] \leqslant E[(Y-d)_+]$. 于是由定义知 $X \leqslant_{\text{cx}} Y$.

再证第一个结论，考虑 $g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)$, 其中 a 是某个点，且 f 于 a 可微. 以下假设期望都是存在的. 则由 $E[X] = E[Y]$, 得 $E[f(X)] \leqslant E[f(Y)]$ 与 $E[g(X)] \leqslant E[g(Y)]$ 等价. 记 $F(x) = \Pr[X \leqslant x]$ 和 $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. 利用

$g(a)=g'(a)=0$, 应用分步积分四次得

$$\begin{aligned}E[g(X)] &= \int_{-\infty}^{a} g(x)\,dF(x) - \int_{a}^{\infty} g(x)\,d\overline{F}(x)\\ &= -\int_{-\infty}^{a} g'(x)F(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} g'(x)\,\overline{F}(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{a} E[(x-X)_+]\,dg'(x) + \int_{a}^{\infty} E[(X-x)_+]dg'(x), \quad (10.39)\end{aligned}$$

注意到 $f(\cdot)$ 是凸函数, 所以 $g(\cdot)$ 也是凸函数, $g'(\cdot)$ 单调增. 于是所求结果由 (10.39) 立即得到. ▽

均值为 μ 的两个随机变量的停止损失变换 $E[(X-d)_+]$ 有相同的渐近线, 其中一个是 x 轴, 另一个是直线 $y=\mu-x$. 可以证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{E[(X-t)_+]-(\mu-t)_+\}dt=\frac{1}{2}\mathrm{Var}[X],$$

该式推广了 (3.82). 因此, 对于均值相等的任意两个随机变量, 二者停止损失变换之差的积分等于它们各自方差之差的一半 (见图 10.6).

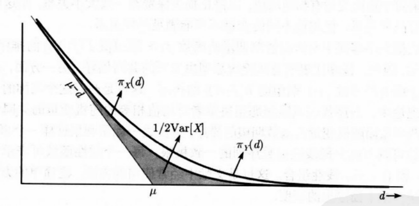


图 10.6　当 $X \leqslant_{\mathrm{cx}} Y$ 时, 两个停止损失变换 $\pi_X(d)=E[(X-d)_+]$ 和 $\pi_Y(d)$. 注意渐近线是相同的

考虑某个一维分布函数 F. 众所周知, 如果 $U\sim U(0,1)$, 则随机变量 $F^{-1}(U)$ 的分布为 F (概率积分变换). 注意对于这样的 u, 存在一个区间使得该区间上任意 y 都满足 $F(y)=u$, 此时如何定义 $y=F^{-1}(u)$ 对上述结论无关紧要. 正如一个随机变量的分布函数可以有可数个间断点一样, 可以证明只有可数个这样的水平段. 事实上, 在区间 $[-2^n,2^n]$ 上, 长度大于 2^{-n} 且 $F(y)$ 于其上取值为常数的子区间个数是有限的, 再令 $n\to\infty$ 即可得证. 因此, 如果 $g(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 是分布函数 F 逆函

数的两个不同选择，则 $g(U)$ 和 $h(U)$ 以概率 1 相等. 通常的选择是取 $F^{-1}(u)$ 为上述子区间的左端点 y (通常只有一个点)，满足 $F(y)=u$. 因此， $F^{-1}(\cdot)$ 是非减的，并且左连续.

现在，考虑 n 维随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$. 定义 $\Re^n$ 中的一个集合为 同单调的，如果该集合中任意两个向量的大小都是以分量来排序的，即较大向量的分量不小于较小向量的相应分量. 如果一个分布的支撑集是同单调的，则称该分布是同单调的，同时，具有这种分布的随机向量也称为同单调的. 我们有如下定理.

定理 10.6.3(同单调联合分布) 设 $U\sim U(0,1)$, 定义以下随机向量

$$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)=(F_{X_1}^{-1}(U),F_{X_2}^{-1}(U),\cdots,F_{X_n}^{-1}(U)). \tag{10.40}$$

则该向量与 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 有相同的边际分布，其支撑集是同单调的，其分布函数等于如下所谓的 Fréchet/Höffding 上界：

$$\Pr[Y_1\leqslant y_1,\cdots,Y_n\leqslant y_n]=\min_{j=1,\cdots,n}\Pr[X_j\leqslant y_j]. \tag{10.41}$$

证明 首先，对任意 $j=1,2,\cdots,n$,

$$\Pr[Y_j\leqslant y_j]=\Pr[F_{X_j}^{-1}(U)\leqslant y_j]=\Pr[U\leqslant F_{X_j}(y_j)]=F_{X_j}(y_j). \tag{10.42}$$

其次， $(Y_1,\cdots,Y_n)$ 的支撑集是一条曲线 $\{(y_1(u),\cdots,y_n(u))|0<u<1\}$, 该曲线关于每个分量单调增. 如果 $(y_1,\cdots,y_n)$ 和 $(z_1,\cdots,z_n)$ 是曲面上的两点，满足对某个 i, 有 $F_{X_i}^{-1}(u)=y_i<z_i=F_{X_i}^{-1}(v)$, 则 $u<v$, 于是对任意 $j=1,2,\cdots,n$, $y_j\leqslant z_j$ 成立.

进一步，

$$\begin{aligned}
&\Pr[Y_1\leqslant y_1,\cdots,Y_n\leqslant y_n]\\
=&\Pr[F_{X_1}^{-1}(U)\leqslant y_1,\cdots,F_{X_n}^{-1}(U)\leqslant y_n]\\
=&\Pr[U\leqslant F_{X_1}(y_1),\cdots,U\leqslant F_{X_n}(y_n)]\\
=&\min_{j=1,\cdots,n}\Pr[X_j\leqslant y_j],
\end{aligned} \tag{10.43}$$

即证得定理的最后一个结论. ∇

$(Y_1,\cdots,Y_n)$ 的支撑集 S 是由一系列连通的曲线或一些单点集构成 (见图 10.7 和图 10.8). 这些一起构成了一个同单调的集合. S 的连通闭曲线 $\overline{S}$ 也是一个连续的、同单调的曲线. $\overline{S}$ 是通过用直线依次连接 S 中曲线的端点而生成. 注意，只有在边际分布函数逆函数的不连续点，才对应上述的一个直线连接，所以这样的操作只可以做可数次. 这样生成的 $\overline{S}$ 是 $\Re^n$ 上的连续单调增曲线.

注意，由 (10.41) 定义的 $(Y_1,\cdots,Y_n)$ 的联合分布函数，即所有分量同时取小值

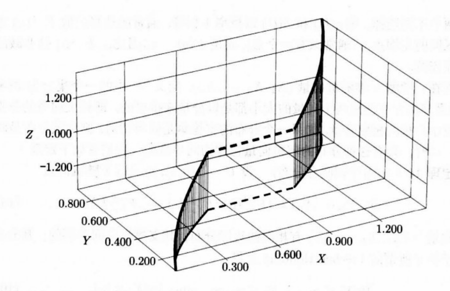


图 10.7　例 10.6.5 中同单调随机向量 (X, Y, Z) 以及边际向量 (X, Y) 的支撑集. 虚线使得同单调支撑集变成连通集

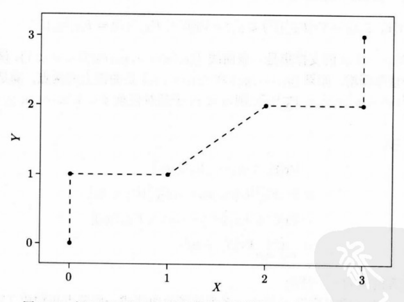


图 10.8　例 10.6.6 中 (X, Y) 的同单调支撑集；黑点表示支撑点，其概率堆积为正，虚线连接支撑点

的概率，是在不改变边际分布前提下联合分布函数所能达到的最大值，也即 (10.41) 等式右边是任意具有给定边际的联合分布函数的上界. 还要注意同单调性使得任何 Y_j 都不能使另一个 Y_k 的风险得到规避. 由本章引言部分的讨论，下面的定理的成立是不足为怪的.

定理 10.6.4(同单调随机向量之和在凸序意义下最大) 定理 10.6.3 中定义的随机向量 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 有以下性质:

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \geqslant_{\mathrm{cx}} X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \tag{10.44}$$

证明 因为 (10.44) 两边的随机变量均值相等, 所以只需证明其停止损失保费有相应的大小关系. 对所有的 $x_1, \cdots, x_n$, 当 $d_1 + \cdots + d_n = d$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - d)_+ \\
&= \{(x_1 - d_1) + (x_2 - d_2) + \cdots + (x_n - d_n)\}_+ \\
&\leqslant \{(x_1 - d_1)_+ + (x_2 - d_2)_+ + \cdots + (x_n - d_n)_+\}_+ \\
&= (x_1 - d_1)_+ + (x_2 - d_2)_+ + \cdots + (x_n - d_n)_+.
\end{aligned} \tag{10.45}$$

假设 d 满足 $0 < \Pr[Y_1 + \cdots + Y_n \leqslant d] < 1$ (若假设不成立, 则可以证明 $Y_1 + \cdots + Y_n$ 和 $X_1 + \cdots + X_n$ 的停止损失保费相同). 连通闭曲线 $\overline{S}$ 包含了同单调随机向量 $(Y_1, \cdots, Y_n)$ 的支撑集 S, 该曲线在每一个坐标方向上都朝上延伸. 显然, $\overline{S}$ 与超平面 $\{(x_1, \cdots, x_n) | x_1 + \cdots + x_n = d\}$ 恰好只有一个交点, 以 $(d_1, \cdots, d_n)$ 记这个交点. 对于某些特定的例子, 很容易就能确定出这个交点. 但在这里, 我们只需要知道这样交点的存在性即可. 对 $(Y_1, \cdots, Y_n)$ 支撑集 S 中的任意点 $(y_1, \cdots, y_n)$, 我们有如下的等式:

$$(y_1 + y_2 + \cdots + y_n - d)_+ \equiv (y_1 - d_1)_+ + (y_2 - d_2)_+ + \cdots + (y_n - d_n)_+. \tag{10.46}$$

这是因为对特定的 $(d_1, \cdots, d_n)$, 若 $y_j > (<) d_j$ 对某个 j 成立, 则利用同单调性知 $y_k \geqslant (\leqslant) d_k$ 对所有 k 成立. 当所有 $y_j \leqslant d_j$ 时, (10.46) 左右两边为 0. 现在, 把上面等式中的 y_i 换成相应的随机变量并取期望, 得到

$$\begin{aligned}
&E[(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n - d)_+] \\
&= E[(Y_1 - d_1)_+] + E[(Y_2 - d_2)_+] + \cdots + E[(Y_n - d_n)_+] \\
&= E[(X_1 - d_1)_+] + E[(X_2 - d_2)_+] + \cdots + E[(X_n - d_n)_+] \\
&\geqslant E[(X_1 + X_2 + \cdots + X_n - d)_+],
\end{aligned} \tag{10.47}$$

此处第二等式成立是因为任意 j, X_j 和 Y_j 有相同的边际分布. ▽

例 10.6.5(一个 3 维连续随机变量) 设 X 服从集合 $(0, \frac{1}{2}) \cup (1, \frac{3}{2})$ 上的均匀分布, $Y \sim \mathrm{Beta}(2,2)$, $Z \sim N(0, 1)$. 同单调分布的支撑集是如下集合:

$$\{(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(u), F_Z^{-1}(u)) | 0 < u < 1\} \tag{10.48}$$

(见图 10.7). 实际上, 并未画出所有的支撑集. 未画出部分对应于 $u \notin (\Phi(-2), \Phi(2))$, 该部分沿着两条渐近线延伸, 这两条渐近线分别为垂直线 $(0,0,z)$ 和垂直线 $(\frac{3}{2},1,z)$. 图中连续的实线部分是支撑集 S, 虚线是一条直线, 连接 S 的两部分使其形成一条连通的曲线 $\overline{S}$. 注意 $F_X(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 和 $x=1$ 之间有一个水平段. 可以看到, $\overline{S}$ 沿着 z 轴在 (x,y)- 平面的投影是一个单调增的曲线, 沿其它轴的投影也是如此. ∇

例 10.6.6(一个 2 维离散例子) 设 X 服从 $\{0,1,2,3\}$ 上均匀分布, $Y \sim B(3,\frac{1}{2})$. 容易验证

$$(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(u)) = \begin{cases} (0,0), & \text{当 } 0 < u < \dfrac{1}{8} \text{ 时}, \\ (0,1), & \text{当 } \dfrac{1}{8} < u < \dfrac{2}{8} \text{ 时}, \\ (1,1), & \text{当 } \dfrac{2}{8} < u < \dfrac{4}{8} \text{ 时}, \\ (2,2), & \text{当 } \dfrac{4}{8} < u < \dfrac{6}{8} \text{ 时}, \\ (3,2), & \text{当 } \dfrac{6}{8} < u < \dfrac{7}{8} \text{ 时}, \\ (3,3), & \text{当 } \dfrac{7}{8} < u < 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

在上述 u 小区间的端点, $(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(u))$ 可以通过取左极限或取右极限得到. 于点 $(1,1)$ 和 $(2,2)$ 的概率堆积分别为 $\frac{1}{4}$, 而于同单调分布支撑集 S 的其它点上的概率堆积分别为 $\frac{1}{8}$. 把这些点用直线连接起来可得到曲线 $\overline{S}$, 见图 10.8 中的虚线. 连接 $(1,1)$ 和 $(2,2)$ 两点的直线并不平行坐标轴, 这是因为 $F_X(y)=\frac{1}{2}$ 和 $F_Y(y)=\frac{1}{2}$ 的 y 点分别构成区间 $(1,2)$. 注意连接 $(1,1)$ 和 $(2,2)$ 的任意非减曲线都会得到一个可行的 $\overline{S}$. ∇

例 10.6.7(一对夫妇的死亡率) 设 $n=2$, $X \sim \text{Bernoulli}(q_x)$, Y 满足 $\frac{1}{2}Y \sim \text{Bernoulli}(q_y)$. 考虑寿险中的两个生命实体 (一对夫妇), 其中男性年龄为 x, 死亡给付为 1, 女性年龄为 y, 死亡给付为 2. 假设他们的死亡风险是相互不独立的随机变量. 记 $z=\Pr[X=1, Y=2]$, 则 (X,Y) 的联合分布可如下表示:

	$X=0$	$X=1$	总计
$Y=0$	$1-q_x-q_y+z$	q_x-z	$1-q_y$
$Y=2$	q_y-z	z	q_y
总计	$1-q_x$	q_x	1

对于每一个凸函数 $f(\cdot)$,

$$E[f(X+Y)] = f(0)(1-q_x-q_y)+f(1)q_x+f(2)q_y \\ +[f(0)-f(1)-f(2)+f(3)]z \tag{10.49}$$

关于 z 单调增. 因此, 取 z 为尽可能大的值, 即 $z=\min\{q_x,q_y\}$, 我们得到在凸序意义下最大的 $X+Y$. 假设 $q_x<q_y$, 则

	$X=0$	$X=1$	总计
$Y=0$	$1-q_y$	0	$1-q_y$
$Y=2$	q_y-q_x	q_x	q_y
总计	$1-q_x$	q_x	1

只要事件 $X=1, Y=0$ 和事件 $X=0, Y=2$ 其中之一或二者的概率为 0, 对应的联合分布就是同单调的. 对于 $q_x<q_y$ 情形下的同单调分布, 如果 $X=1$ 发生, 则事件 $Y=2$ 也必然发生; 而对于 $q_x>q_y$, 情况正好相反. 因此, 同单调联合死亡模式的特点是, 如果死亡概率较小的人死亡, 那么另一个人也会死亡. 当 $q_x=q_y$ 时, $Y=2X$ 以概率为 1 成立. ▽

例 10.6.8(随机利息期限结构中的现金流) 假设在未来的 n 年里, 我们要在每年的年末支付 1. 利率是不固定的, 随机变动. 假设时刻 k 的支付折现因子 为

$$X_k = e^{-(Y_1+\cdots+Y_k)}, \tag{10.50}$$

这里每年的利率 Y_j 服从某个多维正态分布, 例如一个几何布朗运动. 因此, X_k 服从对数正态分布, 所有支付的总现值等于多个服从对数正态分布的相依随机变量之和. 对于这样的随机变量, 分析上不易处理. 因为 e^{-x} 是一个凸函数, 所以当 $Y_1,\cdots,Y_k$ 同单调时 $E[X_k]$ 达到最大. 这样, 如果随机变量 $Y_1,\cdots,Y_n$ 取成为同单调的, 即 $Y_i=F_{Y_i}^{-1}(U), i=1,2,\cdots,n$, 其中 $U\sim U(0,1)$, 总的期望支付 $\sum_i E[X_i]$ 达到最大. 如果随机变量 Y_i 恰好都有同样的分布, 则 $Y_1+\cdots+Y_k=kY_1$. 此时, 随机变量 $\sum_i X_i$ 是一个有限的几何级数. ▽

有时相依结构是已知的, 但麻烦的是我们不能充分利用这个已知条件. 在下面的例子里, 当存在随机变量 Z, 其分布函数已知, 并且给定 $Z=z$, 所有 X_i 的条件分布也是已知时, 我们给出 $X_1+\cdots+X_n$ 的随机界. 信度理论章节中的结构变量就是一个很好的例子. 由推论 10.3.13, $X_1+\cdots+X_n$ 在凸序意义下的下界为 $E[X_1+\cdots+X_n|Z]$. 比同单调上界更好的凸序上界可通过如下方式得到: 对于每一个 z, 把给定 $Z=z$ 条件下 $X_1,\cdots,X_n$ 的条件分布替换为对应的同单调分布, 再

对所得到的分布取加权平均. 改进后的上界有事先给定的边际分布, 因此这个上界比仅用边际分布导出的同单调上界小 (见习题 §10.6 第 12 题).

例 10.6.9(当结构变量存在时的随机界限) 我们通过一个例子来说明对结构随机变量取条件的技巧. 在这里, 多元正态分布非常有用, 因为条件分布和边际分布都是已知的. 设 $n=2$, 并取 Y_1, Y_2 为独立的 $N(0,1)$ 随机变量. 考虑和 $S=X_1+X_2$, 其中 $X_1=e^{Y_1}\sim \mathrm{LN}(0,1)$, $X_2=e^{Y_1+Y_2}\sim \mathrm{LN}(0,2)$. 对于 Z, 取其为 Y_1, Y_2 的线性组合, 此处取 $Z=Y_1+Y_2$. 用记号 S_l 表示上面提到过的下界. 注意到 $E[X_2|Z]=e^Z$, $[Y_1|Y_1+Y_2=z]\sim N(\frac{1}{2}z,\frac{1}{2})$, 因此

$$E[e^{Y_1}|Y_1+Y_2=z]=m\left(1;\frac{1}{2}z,\frac{1}{2}\right), \tag{10.51}$$

其中 $m(t;\mu,\sigma^2)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$ 是 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布的矩母函数. 这样, 就得到

$$E[e^{Y_1}|Z]=e^{\frac{1}{2}Z+\frac{1}{4}}. \tag{10.52}$$

所以下界为

$$S_l=E[X_1+X_2|Z]=e^{\frac{1}{2}Z+\frac{1}{4}}+e^Z. \tag{10.53}$$

同单调上界 S_u 对应于 $(X_1,X_2)\sim(e^W,e^{\sqrt{2}W})$, 其中 $W\sim N(0,1)$. 改进的上界 S_u' 可表为两项之和, 其第 2 项同样为 e^Z, 而第 1 项等于 $e^{\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}\sqrt{2}W}$, 其中 $Z\sim N(0,2)$ 与 $W\sim N(0,1)$ 相独立. 在这些界中所涉及的变量皆服从对数正态分布, 所以这些界的方差很容易计算. 注意, 在比较凸序随机变量的停止损失保费时, 比较方差是有意义的. 这是因为两个凸序的随机变量方差差的一半等于它们各自的停止损失保费之差的积分 (见图 10.6). 这表明, 如果 $X\leqslant_{\mathrm{cx}}Y$ 且 $\mathrm{Var}[X]=\mathrm{Var}[Y]$, 则 X 和 Y 必同分布. 而且对于均值相同的随机变量, 其方差之间的比值约等于各自停止损失保费的比值减去它们最小的可能值. 读者可以验证

$$\begin{aligned}
(E[S])^2 &= e^1+2e^{\frac{3}{2}}+e^2,\\
E[S_l^2] &= e^{\frac{3}{2}}+2e^{\frac{5}{2}}+e^4,\\
E[S^2]=E[S_u'^2] &= e^2+2e^{\frac{5}{2}}+e^4,\\
E[S_u^2] &= e^2+2e^{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}+e^4.
\end{aligned} \tag{10.54}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[E[S]] &= 0,\\
\mathrm{Var}[S_l] &= 64.374,\\
\mathrm{Var}[S]=\mathrm{Var}[S_u'] &= 67.281,\\
\mathrm{Var}[S_u] &= 79.785.
\end{aligned} \tag{10.55}$$

所以，通过对 Y_1+Y_2 取条件而得到的 S 的随机下界 S_l 比 $E[S]$ 要好；改进的上界 S_u' 事实上与 S 同分布. 一般，对于成对的随机变量，通过对其中之一取条件而得到的上界 S_u' 与 S 同分布 (见习题 §10.6 第 22 题).

对于下界，回忆 $\mathrm{Var}[S]=E[\mathrm{Var}[S|Z]]+\mathrm{Var}[E[S|Z]]$. 可见 S_l 的方差恰好是第二项. 要使第二项最大，即要使第一项最小，因此，我们寻找一个 Z 使其与 S 尽可能的相近. 分别用 $1+Y_1$ 和 $1+Y_1+Y_2$ 近似 e^{Y_1} 和 $e^{Y_1+Y_2}$, 则 $S\approx 2+2Y_1+Y_2$, 因此，通过对 $2Y_1+Y_2$ 而不是 Y_1+Y_2 取条件，可以得到一个更好的下限. 这个问题留作习题 (§10.6 第 11 题). ∇

例 10.6.10(PQD) 我们已看到，如果两个随机变量的联合分布是同单调的，或联合分布尽可能得大，那么这两个随机变量是极大相关的. 这促使我们考虑边际分布对应相同的随机向量对之间的一个偏序. 假设下面所有的随机变量 X, X', $X^{\perp}$ 和 X^U 都有相同的边际分布函数 F, 相应的随机变量 $Y, Y', Y^{\perp}$ 和 Y^U 都有边际分布函数 G. 如果对于所有的 x 和 y, X 和 Y 都分别小于或等于 x 和 y 的概率 $F_{X,Y}(x,y)$ 大于 X' 和 Y' 相应的概率，则我们称 (X,Y) 比 (X',Y') 相依性更强. 如果 $X^{\perp}$ 和 $Y^{\perp}$ 相互独立， (X^U,Y^U) 有同单调的联合分布，那么 (X^U,Y^U) 的相依性显然要强于 $(X^{\perp},Y^{\perp})$. 事实上， (X^U,Y^U) 的相依性强于任何一对随机向量 (X,Y), 因此， X^U 与 Y^U 之间极端正相依. 若一对随机向量 (X,Y) 的相依性强于 $(X^{\perp},Y^{\perp})$, 即

$$\Pr[X\leqslant x, Y\leqslant y]\geqslant \Pr[X\leqslant x]\Pr[Y\leqslant y],\quad \forall\, x,\ y. \tag{10.56}$$

则称 (X,Y) 为*正象限相依* (以下简记为 PQD). 同样，也存在这样的一个具有给定边际的联合分布，其相依程度达到另一个极端，即极端负相依. 这从以下联合分布函数的下界可以看出

$$\Pr[X\leqslant x, Y\leqslant y]\geqslant \max\{0, F(x)+G(y)-1\}. \tag{10.57}$$

该不等式可直接从 Bonferroni 不等式推出 (见习题 §10.6 第 8 题). 随机向量 $(X,Y)=(F^{-1}(U),G^{-1}(1-U))$ 的联合分布函数即为上面的 Fréchet/Höffding 下界. 这里，当 X 取较大值时， Y 有取较小值的趋势；反之亦然. 事实上， X 和 $-Y$ 是极端正相依； X 和 Y 不是同单调的，而是反向单调的.

为了比较成对的随机变量之间相依程度，我们只简单地比较它们某些相依度量的值，如通常的相关系数 $r(X,Y)=(E[XY]-E[X]E[Y])/\sigma_X\sigma_Y$, 亦称为 Pearson 乘积矩相关系数，以及 Spearman 秩相关系数 $\rho(X,Y)=r(F(X),G(Y))$. 这个做法的好处就是可以得到一个全序，但同时也有一些局限性 (见习题 §10.6 第 19 题).

上面定义的相依性偏序有一条重要的性质，即相依性较强的一对随机向量之和在凸序意义下较大. 这可以由这个等式 $E[(X+Y-d)_+]=E[(d-X-Y)_+]+E[X]+$

$E[Y]-d$ 以及下面这个式子推得，其中下式交换积分顺序是根据富比尼 (Fubini) 定理：

$$E[(d-X-Y)_+] = \iint_{x+y\leqslant d} \int_{t=y}^{d-x} dt\, dF(x,y)$$

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} \iint_{y\leqslant t,\ x\leqslant d-t} dF(x,y)dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} F(t,d-t)dt. \tag{10.58}$$

更多的 PQD 性质见后面的习题. 特别地，正如我们所预料的那样，当 X, Y 和 Z 相互独立时，(X,X), $(X,X+Z)$ 和 $(X+Y,X+Z)$ 都是 PQD 的. 同时，这个相依性概念可以推广至向量维数 $n>2$ 的情形. ∇

例 10.6.11(分布连接函数) 考虑连续的二维随机向量 (X,Y), 其联合分布为 $F(x,y)$. 假设边际分布已知，并记为 $F(x,\infty)=F(x)$ 和 $F(\infty,y)=G(y)$. *分布连接函数*(copula) 为构造具有给定边际分布的联合分布函数类提供了方法. 一个分布连接就是一个函数 $C(u,v)$, 它把边际分布映射到联合分布：$F(x,y)=C(F(x),G(y))$. 我们通过以下三个特殊的例子来阐述这个概念 (见上例)：

$$\begin{aligned} &C_1(u,v)=\min\{u,v\};\\ &C_2(u,v)=u\,v;\quad 0<u<1,\ 0<v<1\\ &C_3(u,v)=\max\{0,u+v-1\}.\end{aligned} \tag{10.59}$$

可见，$C_1(u,v)$ 是任何分布连接函数的 Fréchet/Höffding 上界，它对应上例中的同单调随机向量分布；另一方面，$C_3(u,v)$ 是 Fréchet/Höffding 下界，它对应的正好是相反情形. 另一个连接函数 $C_2(u,v)$ 表示 X 和 Y 相互独立的情形. 考虑特殊的边际分布函数 $F(x)=x$ 和 $G(y)=y$, $x,y\in(0,1)$, 可见 $C(u,v)$ 本身必须是一个二维联合分布函数，其边际分布为 $U(0,1)$ 分布，因此 $C(u,1)=u$, $C(1,v)=v$.

现在，假设 (U,V) 是一个随机向量，其联合分布由分布连接函数 $C(u,v)$ 得到，其边际分布都是 $U(0,1)$ 分布. 容易验证，如果 $C=C_1$, 则 $U\equiv V$; 如果 $C=C_3$, 则 $U\equiv 1-V$; 如果 $C=C_2$, 则 U 和 V 相互独立. 分布连接函数的混合仍然是一个分布连接函数. 我们将证明取 (10.59) 中的三个分布连接的凸组合，可以得到这样的一个随机向量，其边际分布为 $U(0,1)$ 分布，并且相关系数可取 $[-1,1]$ 中任何一个数. 事实上，对于任意 $p_1,p_2,p_3\geqslant 0$, $p_1+p_2+p_3=1$, 有

$$C(u,v)=p_1C_1(u,v)+p_2C_2(u,v)+p_3C_3(u,v), \tag{10.60}$$

则对应的随机向量 (U,V) 有如下的随机表示

$$\left(U,\ I_1U+I_2U^{\perp}+I_3(1-U)\right), \tag{10.61}$$

其中 I_i, $i=1,2,3$, 是相依的 Bernoulli(p_i) 随机变量, 满足 $I_1+I_2+I_3\equiv 1$, 并且与 $U^{\perp}\sim U(0,1)$ 相互独立. 为确定相关系数, 注意到

$$\begin{aligned}E[UV] &= p_1E[U^2]+p_2E[U\,U^{\perp}]+p_3E[U(1-U)]\\ &= \frac{1}{3}p_1+\frac{1}{4}p_2+\frac{1}{6}p_3,\end{aligned}\tag{10.62}$$

于是

$$r(U,V)=\frac{E[UV]-E[U]E[V]}{\sqrt{\mathrm{Var}[U]}\sqrt{\mathrm{Var}[V]}}=p_1-p_3.\tag{10.63}$$

因此, 当 $p_1=1$ 时, $r(U,V)=1$ (对应同单调上界); 当 $p_3=1$ 时, $r(U,V)=-1$ (对应反向单调下界); 当 $p_1=p_3$ 时, $r(U,V)=0$. 特别, 只有当 $p_1=p_3=0$ 时, U 和 V 才相互独立.

如果一个分布函数是从一个分布连接产生的, 那么很容易模拟该分布的一个实现. 首先通过计算机产生 $U(0,1)$ 分布的随机数 u, 再从给定 $U=u$ 下的 V 的条件分布中产生一个实现 v, 此处的条件分布函数为 $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$. 其次, 按如下方式得到 (X,Y) 的一个实现 (x,y): $x=F^{-1}(u)$, $y=G^{-1}(v)$. 注意, 上面 (10.63) 并不能给出 Pearson 乘积矩相关系数 $r(X,Y)$, 而是给出了 Spearman 秩相关系数 $\rho(X,Y)=r(F(X),G(Y))$.

分布连接函数可以灵活地用来产生很多符合实际的联合分布, 这使得我们能够对危险性程度较高或较低的随机变量之和进行模拟. ▽

§ 10.7 习 题

§10.2

1. 设 $f_X(\cdot)$ 和 $f_Y(\cdot)$ 是两个概率密度或概率函数, 相互交叉一次, 即存在一个 c 使得当 $x<c$ 时, $f_X(x)\geqslant f_Y(x)$; 当 $x>c$ 时, $f_X(x)\leqslant f_Y(x)$. 证明 $X\leqslant_{\rm st} Y$. 为什么 $f_X(\cdot)$ 和 $f_Y(\cdot)$ 交叉至少一次?

2. 设 $X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$, $Y\sim\Gamma(\alpha,\beta')$, 其中 $\beta>\beta'$, 则 $X\leqslant_{\rm st} Y$. 若 $Y\sim\Gamma(\alpha',\beta)$, $\alpha<\alpha'$, 则结论仍成立.

3. 对任意 $0\leqslant p_1<p_2\leqslant 1$, 类似于例 10.2.2, 构造随机向量 (X,Y) 使得 $X\sim B(n,p_1)$, $Y\sim B(n,p_2)$ 且 $\Pr[X\leqslant Y]=1$. 由此证明 $B(n,p)$ 分布在随机序意义下关于 p 单调增.

4. 利用习题 §10.2 第 1 题证明上道习题中的结论.

5. 类似习题 §10.2 第 3 题, 但现在考虑 $X\sim B(n_1,p)$, $Y\sim B(n_2,p)$, 其中 $n_1<n_2$. 利用习题 §10.2 第 1 题, 给出证明.

6. 设 $N\sim B(2,0.5)$ 和 $M\sim B(3,p)$, 证明 $(1-p)^3\leqslant\frac{1}{4}$ 是 $N\leqslant_{\rm st} M$ 成立的充要条件.

7. 设风险 X 和 Y 具有以下的边际分布: $\Pr[X=j]=\frac{1}{4}$, $j=0,1,2,3$; $\Pr[Y=j]=\frac{1}{4}$, $j=0,4$, $\Pr[Y=2]=\frac{1}{2}$. 试构造一个联合分布满足 $\Pr[X\leqslant Y]=1$.

8. 证明序 $\leqslant_{st}$ 在以下意义下是泛函不变 的：对每个非降函数 f, $X \leqslant_{st} Y$ 蕴涵 $f(X) \leqslant_{st} f(Y)$. 把此性质应用于一个理赔 x 的超额损失再保险 $f(x) = (x-d)_+$ 和比例再保险 $f(x) = \alpha x$, 其中 $\alpha > 0$.

§10.3

1. 设 $M \sim B(n,p)$, $N \sim B(n+1, \frac{np}{n+1})$, 证明 $M \leqslant_{SL} N$, 并证明当 $n \to \infty$ 时，可导出泊松停止损失保费.

2. 设 $N \sim B(2, 0.5)$ 和 $M \sim B(3,p)$, 证明 $p \geqslant \frac{1}{3}$ 是 $N \leqslant_{SL} M$ 成立的充分必要条件.

3. 证明：若 $X \sim Y$, 则 $\frac{1}{2}(X+Y) \leqslant_{SL} X$. X 和 Y 独立是必要的吗？

4. 设 X 和 Y 是两个具有相同均值的风险，且有共同的支撑集 $\{a,b,c\}$, 其中 $0 \leqslant a < b < c$, 证明要么 $X \leqslant_{SL} Y$, 要么 $Y \leqslant_{SL} X$. 试给出两个具有相同均值的随机变量，其共同的支撑集为 $\{0,1,2,3\}$, 但这两个变量不满足停止损失序.

5. 设 F 和 G 是两个风险的分布函数，于 $(-\infty, a)$ 和 $[b, \infty)$ 上 $F(x) = G(x)$, 于 $[a,b)$ 上 G 为常数. 注意这里的 G 可以通过 F 把 (a,b) 上的概率质量分散到区间的两个端点上得到. 证明 $F \leqslant_{SL} G$, 并绘出 F 和 G 的停止损失变换图.

6. 重新考虑上题，现在把 F 于 (a,b) 上的概率质量堆放于某点 d, 即 $G(x)$ 于 $[a,d)$ 和 $[d,b)$ 上为常数. 同样考虑把 F 于闭区间 $[a,b]$ 上的概率质量堆放于某点情形.

7. 考虑如下的分布函数 F 的微分：

$$dF(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}dx, & \text{当 } 0 < x < 1 \text{ 和 } 2 < x < 3 \text{ 时}, \\ \frac{1}{6}, & \text{当 } x \in \{1,2\} \text{ 时}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

证明 F 间接危险于 $U(0,3)$ 分布.

8. 设 A_1, A_2, B_1 和 B_2 是相互独立的 Bernoulli 随机变量，对应的参数分别为 p_1, p_2, q_1 和 q_2. 如果 $p_1 + p_2 = q_1 + q_2$, 那么 (1) 何时 $A_1 + A_2 \leqslant_{SL} B_1 + B_2$ 成立？ (2) 何时 $A_1 + A_2 \geqslant_{SL} B_1 + B_2$ 成立？ (3) 何时这两个随机不等式都不成立？

9. 证明一个负二项分布随机变量 N 在停止损失序意义下大于任意泊松随机变量 M, 此处假定 $E[M] \leqslant E[N]$. 当 M 服从二项分布时，上结论也成立.

10. 已知对于每个风险厌恶系数 α, 风险 X 的指数保费小于或等于 Y 的指数保费，试问 X 和 Y 满足什么样的序关系？

11. 证明 (10.5) 定义的停止损失变换 $\pi_i(d)$ 对应的分布函数 F_i 危险性递增.

12. 利用停止损失变换和分布函数略图，完成定理 10.3.7 的证明，即证明随机变量 Y 满足要求.

13. 设 $X \leqslant_{SL} Z$ 和 $E[X] < E[Z]$. 考虑如下函数 $\pi(\cdot)$:

$$\pi(t) = \begin{cases} E[(X-t)_+], & t \leqslant 0, \\ E[(Z-t)_+], & t \geqslant c, \\ A(t), & 0 \leqslant t \leqslant c, \end{cases}$$

这里 c 和 $A(\cdot)$ 的选取使得 $A(0)=\mu$, $A(t)$ 是 $E[(Z-t)_+]$ 于 $t=c$ 点的切线. 证明 $\pi(\cdot)$ 是凸函数, 因此是某个风险 Y 的停止损失变换. 绘出 X, Y 和 Z 的分布函数. 证明 $X \leqslant_{\mathrm{SL}} Y \leqslant_{\mathrm{SL}} Z$, 且 $E[X]=E[Y]$ 和 $Y \leqslant_{\mathrm{st}} Z$. (此处, Y 在类似于定理 10.3.7 的意义下分离 X 和 Z.)

14. 证明如果 $X \leqslant_{\mathrm{e}} Y$ 和 $E[X^k]=E[Y^k]$, $k=1,2,\cdots,n-1$, 则 $E[X^n] \leqslant E[Y^n]$. (这意味着如果 $X \leqslant_{\mathrm{e}} Y$ 且 $E[X]=E[Y]$, 则 $\mathrm{Var}[X] \leqslant \mathrm{Var}[Y]$.)

15. 设风险 X 和 Y 满足对某个 $d>0$, 有 $\Pr[Y>d]>0$, 但 $\Pr[X>d]=0$. 试问 $X \leqslant_{\mathrm{SL}} Y$, $X \leqslant_{\mathrm{st}} Y$ 或 $X \leqslant_{\mathrm{e}} Y$ 成立吗?

16. 设 $X \sim U(0,1)$, $V=\frac{1}{2}X$, $W=\min\{X,d\}$, 其中 $d>0$. 绘出 V, W 和 X 的分布函数图. 试分别确定 d 使得 $V \leqslant_{\mathrm{SL}} W$ 和 $W \leqslant_{\mathrm{SL}} V$.

17. 利用分部积分法对 $E[X]=E[Y]$ 情形证明定理 10.3.8. 利用停止损失变换是 $F_X(x)-1$ 的一个不定积分的事实, 再考虑 $v(x)=-u(-x)$. 为证明方便, 考虑 $E[v(X)-v(0)-Xv'(0)]$ 并假定 $v(\cdot)$ 于 0 点可微.

18. 给定以下风险 $X_1,\cdots,X_5$:

(1) $X_1 \sim B(10,\frac{1}{2})$;

(2) $X_2 \sim B(15,\frac{1}{3})$;

(3) $X_3 \sim \mathrm{Poisson}(5)$;

(4) $X_4 \sim \mathrm{NB}(2,\frac{2}{7})$;

(5) $X_5 \sim 15I$, 其中 $I \sim \mathrm{Bernoulli}\ (\frac{1}{3})$.

试问任意两个使用单调增效用函数的决策者是否共同偏好 X_1 甚于 X_2? 对每对 (i,j), $i,j=1,2,3,4$, 确定 $X_i \leqslant_{\mathrm{SL}} X_j$ 是否成立. 对 $j=2,3$, 确定 $X_j \leqslant_{\mathrm{SL}} X_5$ 或其反向不等式是否成立. $X_3 \leqslant_{\mathrm{e}} X_5$ 成立吗?

19. 考虑如下的风险类 $X_p=pY+(1-p)Z$, 其中 Y 和 Z 是独立的 $\mathrm{Exp}(1)$ 随机变量, $p \in (0,\frac{1}{2})$. 注意 $X_0 \sim \mathrm{Exp}(1)$, $X_{0.5} \sim \Gamma(2,2)$. 试问该类中风险可以随机排序吗? 证明使用指数效用函数的决策者偏好损失 X_p 甚于 X_q 当且仅当 $p \geqslant q$, 并证明 $X_{1/2} \leqslant_{\mathrm{SL}} X_p \leqslant_{\mathrm{SL}} X_0$.

20. 分布函数 $G(\cdot)$ 和 $V(\cdot)$ 定义为

$$G(x) = \frac{1}{4}\left\{F^{*0}(x)+F^{*1}(x)+F^{*2}(x)+F^{*3}(x)\right\}$$
$$V(x) = q_0F^{*0}(x)+q_1F^{*1}(x)+q_2F^{*2}(x),$$

这里 F 是任意一个风险的分布函数, F^{*n} 表示 F 的 n 重卷积. 当 $n=0$ 时, F^{*0} 表示常数 0 的分布函数. 试确定 $q_0,q_1,q_2 \geqslant 0$, $q_0+q_1+q_2=1$, 使得 $V \leqslant_{\mathrm{SL}} G$ 且 V 和 G 有相同均值.

21. 在 $\leqslant_{\mathrm{e}}$, $\leqslant_{\mathrm{st}}$ 和 $\leqslant_{\mathrm{SL}}$ 序意义下, 比较两个复合泊松随机变量 S_1 和 S_2, 其中 S_1 和 S_2 对应的参数给定为

(1) $\lambda_1=5$, $p_1(x)=\frac{1}{5}$, $x=1,2,3,4,5$;

(2) $\lambda_2=4$, $p_1(x)=\frac{1}{4}$, $x=2,3,4,5$.

22. 设 $Y \equiv CX$, 其中 C 和 X 相互独立且 $\Pr[C=0.5]=\Pr[C=1.5]=0.5$. 讨论风险 X 和 Y 之间 $\leqslant_{\mathrm{e}}$, $\leqslant_{\mathrm{st}}$ 和 $\leqslant_{\mathrm{SL}}$ 序关系.

23. 设 $N \sim B(2,\frac{1}{2})$, $M \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$. 试分别确定 λ 使得 $N \geqslant_{\mathrm{st}} M$, $N \leqslant_{\mathrm{st}} M$ 和 $N \leqslant_{\mathrm{SL}} M$.

24. 在定理 10.3.5 的证明过程中，考虑情形 $Y \sim U(0,3)$, Z 是整值变量满足 $\pi_Z(0)=2$ 和 $\pi_Z(k)=\pi_Y(k)$, $k=1,2,3$. 基于概率质量的分散来描述 $\pi_Y(d) \to \pi_2(d) \to \cdots \to \pi_Z(d)$ 的每步转移.

25. 设 $A_j \sim \text{Bernoulli}(p_j)$, $j=1,2,\cdots,n$, 相互独立, 且记 $\overline{p}=\frac{1}{n}\sum_j p_j$. 证明 $\sum_j A_j \leqslant_{\text{SL}} B(n,\overline{p})$.

(本道习题证明了以下的结论：在所有具有总均值为 μ 的 n 个独立 Bernoulli 变量和中，$B(n,\frac{\mu}{n})$ 是在停止损失序意义下最大的.)

26. 设 $\Pr[X=i]=\frac{1}{6}$, $i=0,1,\cdots,5$, $Y \sim B(5,p)$. p 分别取何值时 $X \leqslant_{\text{st}} Y$, $Y \leqslant_{\text{st}} X$, $X \leqslant_{\text{SL}} Y$ 和 $Y \leqslant_{\text{SL}} X$ 成立？

§10.4

1. 考虑分布函数类 $F(\cdot;p,\mu)$, 其中 $F(x;p,\mu)=1-pe^{-x/\mu}$, $p\in(0,1)$, $\mu>0$. 确定参数 p 和 μ 的取值使得 $F(\cdot;p,\mu)$ 在随机序或停止损失序意义下大于或小于 $F(\cdot;p_0,\mu_0)$, 并指出何时两分布之间不存在停止损失序关系.

2. 在 $B(n,p)$ 分布类中 $(n=0,1,\cdots,0\leqslant p\leqslant 1)$, 讨论序关系 $\leqslant_{\text{SL}}$ 和 $\leqslant_{\text{st}}$.

3. 证明指数序在复合运算下封闭：如果 $X \leqslant_{\text{e}} Y$ 和 $M \leqslant_{\text{e}} N$, 则 $X_1+X_2+\cdots+X_M \leqslant_{\text{e}} Y_1+Y_2+\cdots+Y_N$.

4. 考虑两个破产过程，理赔发生过程相同，单位时间有相同的费率 c, 对应的理赔额分别与 X 和 Y 同分布. 问 X 和 Y 满足什么条件，才能使得第二个破产过程的调节系数不小于第一个破产过程的调节系数？

5. 设 S 具有一个复合泊松分布，其个体理赔额大小与 X 同分布，且 t_1, t_2 和 α 满足 $E[(S-t_1)_+]=\lambda E[(X-t_2)_+]=\alpha E[S]$. 对任意 $d>0$, 比较 $E[(\min\{S,t_1\}-d)_+]$, $E[(S-\sum_1^N(X_i-t_2)_+-d)_+]$ 和 $E[((1-\alpha)S-d)_+]$.

6. 如果两个风险有相同的均值 μ 和方差 σ^2, 但第一个风险的偏度较大，那么两风险的停止损失保费关系如何？

7. 在指数序、随机序和停止损失序意义下，比较习题 §3.7 第 6 题中的风险 S 和 T.

8. 在例 10.4.3 中，证明 (α_0,β_0) 点左下方对角线之上和右上方对角线之下的八分之一区域参数所对应的分布，其停止损失保费有时大于，有时小于 $\Gamma(\alpha_0,\beta_0)$ 的停止损失保费.

9. 在注 10.4.10 中，证明 $\overline{X}_{n+1} \leqslant_{\text{SL}} \overline{X}_n$.

10. 证明例 10.4.2 最后的随机变量 X 和 Y 满足指数序关系，但不具有停止损失序关系.

§10.5

1. 设 $0<d<b$. 风险 X 满足 $\Pr[X\in\{0,d,b\}]=1$, 风险 Y 满足 $\Pr[0\leqslant Y\leqslant b]=1$. 如果 X 和 Y 的均值与方差分别相同，则 $E[(X-d)_+]\leqslant E[(Y-d)_+]$.

2. 证明例 10.5.7 中结论 $X \leqslant_{\text{SL}} Y \leqslant_{\text{SL}} Z$ 成立. 利用事实：一个单峰、众数为 0 的连续概率密度等价于分布函数于 $[0,\infty)$ 为凹的，并单独考虑 Y 不连续情形.

3. 对于满足 $\mu=\sigma^2=1$ 且支撑含于区间 $[0,4]$ 的风险，试计算当免赔额 $d=0.5$ 和 $d=3$ 时，其最小与最大停止损失保费.

4. 考虑均值 μ, 方差 σ^2 且支撑含于 $[0,b]$ 的风险，试给出其停止损失保费最小与最大的可能值 (参考图 10.5). 在该图中，画出于 $d=2$ 处有最小停止损失保费的风险所对应的停止损失

变换.

5. 在均值为 μ, 方差为 σ^2 且两点支撑集包含于 $[0, b]$ 的风险中, 何者有较大的偏度? 何者有较小的偏度?

6. 在上题中, 考虑均值为 μ, 方差为 σ^2 且支撑集包含于 $[0, b]$ 的任意风险类, 证明在该类中存在一个风险其偏度达到极大.

7. 设 $T = Y_1 + \cdots + Y_N$, 其中 $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\Pr[0 \leqslant Y \leqslant b] = 1$, $E[Y] = \mu$, 再设 $M \sim \text{Poisson}(\lambda\mu/b)$. 证明 $\mu N \leqslant_{\text{SL}} T \leqslant_{\text{SL}} bM$, 并求这 3 个变量的均值与方差.

8. 验证例 10.5.5 中间一段中的结论.

§10.6

1. 证明 (10.38) 中第一个不等式结合均值相等条件可推出第二个不等式. 注意利用 $E[(X-d)_+] - E[(d-X)_+] = E[X] - d$.

2. 证明等式 (3.82) 可推广适用于均值为 μ 的任意随机变量 X, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{E[(X-t)_+] - (\mu - t)_+\} dt = \frac{1}{2}\text{Var}[X].$$

3. 函数 $f(x) = (d-x)_+$ 是单调减凸函数. 举例说明 $X \leqslant_{\text{SL}} Y$, 但 $E[(d-X)_+] \leqslant E[(d-Y)_+]$ 对某个 d 不成立.

4. 考虑 n 对夫妇一年期寿险保单, 在保单的有效期内, 任一女性死亡概率为 1%, 任一男性死亡概率为 2%, 男女死亡给付分别为 1. 假定不同对夫妇的死亡风险相互独立. 试确定个体模型中总理赔额的分布, 同时在以下两种情形下给出用以近似该总理赔额的聚合模型所对应的分布: a) 每对夫妇各自的死亡风险相互独立, b) 每对夫妇的死亡风险具有同单调分布. 试比较当免赔额至少为 $0.03n$ 时, 聚合模型的停止损失保费.

5. 在例 10.6.7 中, 对不同的 z, 画出 $X_1 + X_2$ 的停止损失变换. 利用图示证明 $X_1 + X_2$ 在停止损失序意义下关于 z 单调增.

6. 证明 $X \leqslant_{st} Y$ 当且仅当它们的同单调联合密度或概率函数 $h(x, y)$ 满足 $h(x, y) = 0$, $x > y$.

7. 考虑一个 2 维同单调随机向量 (X, Y), 各分量分别取 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ 和 $y_1 < y_2 < \cdots < y_m$. 试描述该向量的概率函数特点.

8. 证明 Bonferroni 不等式: $\Pr[A \cap B] \geqslant \Pr[A] + \Pr[B] - 1$, 并利用该不等式推导下界 (10.57). 验证 (10.57) 右端分布具有给定的边际分布, 同时证明 $(F^{-1}(U), G^{-1}(1-U))$ 的分布函数即为此下界.

9. 设 X_1 和 X_2 表示随机指定两个人的身高. 假定这些身高变量是独立同分布的, 满足 $\Pr[X_i = 160, 170, 180] = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. 同单调上界 S_u 的分布是什么? 如果作为条件变量的 Z 取为第 1 个人的性别, 已知 Z 与第 2 个人的身高 X_2 独立, 且 $\Pr[Z=0] = \Pr[Z=1] = \frac{1}{2}$, $\Pr[X_1 = 160, 170 | Z = 0] = \Pr[X_1 = 170, 180 | Z = 1] = \frac{1}{2}$, 试确定下界分布和改进后的上界 S'_u 分布, 并比较以上在凸序意义下上下界的方差.

10. 设 X 和 Y 是独立的 $N(0,1)$ 随机变量, 记 $S = X + Y$, 且假定 $Z = X + aY$, 其中 a 为某个实常数. 问给定 $Z = z$, X 的条件分布是什么? 确定凸下界 $E[S|Z]$ 的分布, 同时也确

定同单调上界和改进的凸上界的分布. 对不同的 α, 比较这些界的方差. 特别考虑以下的几种情形: $S \equiv Z$, $S \perp Z$, $S \equiv X$ 和 $S \propto Y$ (即 $|a| \to \infty$).

11. 在例 10.6.9 中, 求通过对 $aY_1 + Y_2$ 而不是对 $Y_1 + Y_2$ 取条件导出的随机下界的方差 [♠], 并确定 a 使得该方差达到最大.

12. 当事件 $Z = z$ 发生时, 例 10.6.9 中改进的上界可以写成 $F^{-1}_{X_1|Z=z}(U)+\cdots+F^{-1}_{X_n|Z=z}(U)$. 把求和式中的每一项记为 $g_i(U,z)$, 则改进的上界为 $S'_u = \sum_i g_i(U,Z)$. 一般, 这些随机变量 $g_i(U,Z)$ 不再是同单调的. 证明 $g_i(U,Z)$ 与 X_i 同分布, 从而推出改进的上界确实比同单调上界要好.

13. 如果 (X,Y) 是 PQD, 那么对 $\Pr[X \leqslant x|Y \leqslant y]$ 能说些什么?

14. 证明: 如果 X, Y 和 Z 是独立的随机变量, 则随机对 (X,X), $(X,X+Z)$ 和 $(X+Y,X+Z)$ 皆为 PQD.

15. 设 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y) = C(F(x),G(y))$, 其中 $F(x) = F(x,\infty)$ 和 $G(y) = F(\infty,y)$ 为边际分布, $C(u,v) = uv[1+\alpha(1-u)(1-v)]$. 求 α 的取值范围, 以及 X 和 Y 的 Spearman 秩相关系数.

16. 设 (X,Y) 具有连续的分布函数 $F(x,y)$, 证明存在一个 2 维的分布函数 $C(\cdot,\cdot)$, 其边际为 $U(0,1)$ 分布, 使得 $F(x,y) = C(F(x),G(y))$, 其中 $F(x)$ 和 $G(y)$ 表示 (X,Y) 的边际分布函数 (该结果被称为 Sklar 定理).

17. 除了常用的自相关系数和 Spearman ρ, 还有另外一种相依性度量, 称之为 Kendall τ, 该度量在数理统计中是有用的. 对连续的 (X,Y), Kendall τ 定义为 $\tau(X,Y) = 2\times\Pr[(X-X')(Y-Y')>0]-1$, 其中 (X',Y') 是 (X,Y) 的独立拷贝. 证明 Spearman ρ 和 Kendall τ 都可以通过分布连接函数来计算 (见上题).

18. 计算连续同单调随机向量的 ρ 和 τ, 并证明 $\rho = 1$ 或 $\tau = 1$ 蕴涵同单调性.

19. 设 $X \sim \mathrm{LN}(0,1)$, $Y \sim \mathrm{LN}(0,\sigma^2)$ 和 $r(\log X, \log Y) = 1$. 试确定作为 σ 函数的相关系数 $r(X,Y)$, 并证明当 $\sigma = 1$ 时, $r(X,Y) = 1$; 当 $\sigma \to \infty$ 时, $r(X,Y)$ 趋于 0. 同时, 计算 ρ 和 τ.

20. 设随机变量 X 和 Y 同单调, 证明 $\mathrm{Cov}[X,Y] \geqslant 0$. X 和 Y 能够同时同单调且独立吗?

21. 设 (X,Y) 服从 2 维正态分布, (X^c,Y^c) 同单调, 且两向量有相同的边际. 证明 $X+Y$ 和 X^c+Y^c 的分布函数交叉一次, 并确定在何处交叉.

22. 证明对于一对随机变量 (X,Y), 通过对 $Z \equiv X$ 取条件而导出的 $S'_u = F^{-1}_{X|Z}(U) + F^{-1}_{Y|Z}(U)$ 与 $S = X+Y$ 同分布.

习题提示

第 1 章

§1.2

1. 取 $x_0 = E[X]$. 如果 $v(x) = x^2$, 则 $\mathrm{Var}[X] \geqslant 0$.

2. 特别考虑这样的随机变量 X, $\Pr[X = a \pm \varepsilon] = 0.5$.

3. 利用前一道习题.

4. 考察不等式 $E[u(X)] > E[u(Y)]$ 和 $E[u(X)] > u(w)$. 当 $w < 625$ 时, 该决策者偏好 X 甚于 w.

5. 对 (1.11) 应用 Jensen 不等式.

6. $P^+ = 20$; $P^+ \approx 19.98$.

7. $W = 161.5$.

8. 取 $w = 0$, $u(0) = 0$ 和 $u(1) = 1$, 可以得到 $u(2) > 2$, $u(4) = 2u(2)$ 和 $u(8) < 2u(4)$. 使得 $u''(x) > 0$ 或 $u''(x) < 0$ 的 x 是存在的.

§1.3

4. 利用 $\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{\log(m_X(\alpha))-\log(m_X(0))}{\alpha} = \left.\frac{d\log(m_X(\alpha))}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$ 或利用泰勒级数展开.

5. 见书末表 A 中的 X 的矩母函数.

6. $P_X = 412.5 < P_Y$; $\alpha > 0.008$.

7. 对数型的.

8. $\alpha \geqslant 0.5$. α 的量纲为 "元 $^{-1}$".

9. 正态.

10. 对数型效用函数. 利用洛比达法则.

§1.4

1. $\pi(d)$ 于 $(-\infty, 2]$ 上为线性的, $\pi(0) = 2.5$, $\pi(2) = 0.5$; $\pi(x) = 1-(4-x)^2/8$, $x \in [2, 4]$; $\pi(x) = 0$, $x \in [4, \infty)$. 从你所画的草图中可以看出 $\pi'(2+0) \neq \pi'(2-0)$.

2. 由 (1.37) 得 $f_S(d) = 2(1-d)$, $d \in (0,1)$; $f_S(d) = 0$, $d \notin (0,1)$.

3. 利用分步积分.

4. 利用当方差给定时, 停止损失是最优的; 其次, 应用前一道习题.

5. 利用 (1.38).

6. $E[I(X)] = E[(X-d)_+] + d\Pr(X \geqslant d)$.

第 2 章

§2.2

1. a) $E[X] = 1/2$; $\mathrm{Var}[X] = 9/4$; b) $E[X] = 1/2$; $\mathrm{Var}[X] = 37/12$.

2. $E[Y] = 7/4$, $\mathrm{Var}[Y] = 77/48$.

3. $P^+ = 5.996$. 并不完全.

4. $E[X] = 60$; $m_X(t) = 0.9e^0 + 0.02e^{1000t} + \int_0^{1000} 0.00008e^{tx}dx = \cdots$.

5. 对 $I=1$ 和 $I=0$ 取条件.

6. $IX+(1-I)Y$ 中的 $I\sim$ Bernoulli(0.5), $X\equiv 2$, $Y\sim U(2,4)$, 且 I, X 和 Y 相互独立.

7. $c=1/3$, $dG(1)=dG(2)=1/2$; $dH(x)=dx/2$, $x\in(0,1)\cup(2,3)$.

8. $E[T]=E[Z]$, $E[T^2]\neq E[Z^2]$.

9. $N(0,q^2+(1-q)^2)$ 和 $N(0,1)$.

§2.3

1. 参考表 2.1.

2. 乘积运算次数为 $6n^2-15n+12$, $n\geqslant 3$.

3. 把 (2.29) 写成 $\phi(s;\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)\times\int\phi(x;\mu_3,\sigma_3^2)dx$.

4. 对第二部分，应用归纳法、卷积公式以及关系式 $\binom{n}{h}+\binom{n}{h-1}=\binom{n+1}{h}$, $\forall n,h$.

§2.4

1. $f_S(s)=2(e^{-s}-e^{-2s})$; $m_S(t)=\frac{2}{1-t}-\frac{2}{2-t}$.

3. $\kappa_4=E[(X-\mu_1)^4]-3\sigma^4$.

4. 有关矩母函数，见书末的表 A 和 B.

5. $\kappa_3=0$, $\kappa_4=-0.1$.

6. 利用 (2.48) 以及表 A 和表 B.

8. 如果 $X-\mu\sim\mu-X$, 则 X 关于 μ 对称. $p=0.4264056$.

9. $(1-2q)/\sqrt{q(1-q)}$ (见书末的表 B). 如果 X 是对称的，则 3 阶中心矩等于 0, 所以 $q\in\{0,0.5,1\}$. 对 q 的这 3 种取值， I 皆为对称的.

10. 利用 (2.49) 及见书末的表.

11. 半不变量是累积量母函数中 $t^j/j!$ 的系数.

12. 它们的概率母函数是 n 次多项式，只有当所有的系数对应相同时, X 和 Y 的概率母函数才能相等.

13. 证明 X/δ 和 Y/δ 有相同的概率母函数.

14. 矩母函数的定义域是什么？特征函数的定义域又是什么？有时，矩母函数可以延伸到所有的复数，例如指数的矩母函数 $(1-t)^{-1}$. $E[e^{itX}]=E[e^{-itX}]$ 蕴涵了该函数的虚部为 0.

15. 利用上面第 11 题. 条件 $\Pr[Z=0]=\Pr[Z=10]$ 对于 Z 对称是必要的. 证明该条件也是 Z 对称的充分性条件.

16. $\delta=\sqrt[3]{2}$.

17. 证明 $g_X^{(n)}(1)=E[X(X-1)\cdots(X-n+1)]$, 并讨论通常的各阶矩可以从这些阶乘矩计算出来，见 (2.49).

§2.5

1. 可以得到如下的结果：

讨论方法	$3-0$	$3+0$	3.5	$4-0$	$4+0$
精确的	.080		.019		.004
NP	.045		.023		.011
伽玛	.042		.021		.010
CLT	.023		.006		.001

2. 对方程 $x = s + \gamma(s^2-1)/6$ 求解 s.

4. 利用洛比达法则证明 $\lim_{\gamma\downarrow 0}\left[\sqrt{9/\gamma^2+6x/\gamma+1}-3/\gamma\right]=x$. 取 $X^*=(X-\mu)/\sigma$, 用 $\Pr[Z^*\leqslant z]$ 逼近 $\Pr[X^*\leqslant z]$, 其中 $Z^*=(Z-\alpha/\beta)\beta/\sqrt{\alpha}$, $Z\sim\Gamma(\alpha,\beta)$ 具有偏度 γ, 所以 $\alpha=1/\gamma^2$. 于是, 当 $\alpha\to\infty$ 时, 利用 CLT 得 $\Pr[Z^*\leqslant z]\to\Phi(z)$.

5. 如果 $\Phi(y)=1-\varepsilon$, 那么利用 (2.62) 得到 $1-\varepsilon$ is $18+6(y+(y^2-1)/9)$. 进一步可参考 χ^2 分布表.

6. $G(4.5;4,2)\approx 0.983$. 利用 $2\beta\cdot\Gamma(\alpha,\beta)\sim\chi^2(2\alpha)$, 并在一个 χ^2- 表中使用插值法可以得到 0.978. 精确值为 0.9788.

7. 如果 α 为一个整数, 那么泊松分布可以用来表示伽玛分布的分布函数.

8. 例如, 当 $\varepsilon=0.95$ 时, 表给出 28.9, (2.25) 给出 28.59. 第 5 题中的 NP 近似给出 28.63.

9. 安全系数 = 21.14%.

10. 安全系数 = 21.60%.

11. 当 $x=-1$ 时, 平方根号下的表达式为 $(3/\gamma-1)^2\geqslant 0$.

12. 利用表 A 得 $\gamma=4,6,14,\infty$.

13. 设 X_1 为 1 型理赔, 则 $\Pr[X_1=0]=1-q_1$, $\Pr[X_1=j]=q_1p_1(j)$, $j=1,3$. $E[S_1]=20$, $\mathrm{Var}[S_1]=49.6$, 资金为 $E[S]+1.645\sqrt{\mathrm{Var}[S]}$.

14. $E[\sqrt{U}]=\Gamma(\alpha+0.5)/\Gamma(\alpha)\sqrt{\beta}$. $(\alpha-0.5)\Gamma(\alpha-0.5)=\Gamma(\alpha+0.5)$, $\alpha\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha+1)$, 所以 $\Gamma(\alpha+0.5)\approx\Gamma(\alpha)\sqrt{\alpha-0.25}$. $E[T^3]\approx E[Y^3]=(4\alpha+2)\sqrt{4\alpha-1}$; $E[T^4]=16(\alpha^2+\alpha)=E[Y^4]+2$.

§2.6

1. $1-\Phi(g(d))$, 其中 $g^2(d)=\frac{\{B-380+10d\}^2}{297+49.5d^2}$, $d\in[2,3]$.

2. 最大化 $g^2(d)$.

3. $1-\Phi(1.984)=.0235$.

第 3 章

§3.2

1. 对 Poisson(λ) 分布有: $E[S]=\lambda\mu_1$, $\mathrm{Var}[S]=\lambda\mu_2$, $m_S(t)=e^{\lambda(m_X(t)-1)}$.

2. 利用 (2.49).

3. 记 N' 为雌鸟的个数, 于是 $N'=B_1+\cdots+B_N$, 其中 N 是鸟蛋的个数, $B_i=1$ 表示第 i 个鸟蛋孵化出的是雌鸟. 现在利用 (3.5) 来证明 $N'\sim$ Poisson(λp).

4. $\Pr[S=0,1,2,3,4]=e^{-2},0.2e^{-2},0.42e^{-2},0.681333e^{-2},1.0080667e^{-2}$.

5. $f(4,5,6)=0.2232,0.1728,0.0864$; $E[S]=3.2$, $\mathrm{Var}[S]=3.04$.

6. $E[S]=3.2$ (参考第 5 题), $\mathrm{Var}[S]=5.6$.

7. 利用数学归纳法, 或者通过检验导数值以及在某一点 (如在 $x=0$) 的值是否相等的办法来证明左边等于右边.

§3.3

1. 考察矩母函数; 在负二项分布矩母函数中代入 $p=1-\lambda/r$, 再令 $r\to\infty$. 利用 $\lim_{r\to\infty}(1-\lambda/r)^r=e^{-\lambda}$.

2. 在例 3.3.1 中如果 Λ 服从退化分布; 在例 3.3.2 中如果 $c\downarrow 0$.

3. 比较理赔次数和理赔额.

§3.4

1. 见例 3.4.3.

2. 如果 $x_1 = x_2$, 则该理赔额发生的次数是 $N_1 + N_2$.

3. $p(0) = p(1) = p(2)/2 = p(3) = p(4)$.

4. 验证 $\Pr[N' = n, N - N' = m] = \Pr[N' = n]\Pr[N - N' = m]$ 对所有的 n 和 m 成立. 或者: 应用定理 3.4.2, 其中 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = 1$.

5. 验证 $\Pr[N_1 = 1]\Pr[N_2 = 1] = 0.3968 \times 0.3792 \neq \Pr[N_1 = 1, N_2 = 1] = 0.144$. (注意: 我们只对泊松场合证明了定理 3.4.2.)

6. $S = x_1N_1 + x_2N_2 + \cdots$, $S_0 = 0N_0' + x_1N_1' + x_2N_2' + \cdots$, 其中 $N_j, N_j' \sim \cdots$.

§3.5

1. $f(s) = \frac{1}{s}[0.2f(s-1) + 0.8f(s-2) + 1.8f(s-3) + 3.2f(s-4)]$; $f(0) = e^{-2}$.

2. 单独验证 $s = 0$; 对 $s > 0$, 利用 (3.15) 和归纳法.

3. 检验是否区间 (a, b) 的每一点都被处理了. 绘制一个草图.

4. 对 $h = 1, \cdots, t$ 有 $2t$ 次乘法运算 $\lambda hp(h)$. 当 $m > t$ 时 $t(t+1)/2$ 次, 而当 $m \leqslant t$ 时 $m(m+1)/2 + m(t-m)$ 次. 近似地说, 当理赔额的最大值有限时运算的次数随 t 线性速度增加, 其它情况下平方速度增加.

5. $E[N] = \sum_n nq_n = \sum_{n\geqslant 1} n(a + b/n)q_{n-1}a\sum_{n\geqslant 1}(n-1)q_{n-1} + a + b$, 等等.

6. 在 $\pi(2)$ 和 $\pi(3)$ 之间做插值, $d = 2.548$. (由于分布函数是常数, 停止损失保费是线性的.)

7. 利用 Panjer 递归和插值.

8. $S_2 \sim N_1 + 3N_3$, 其中 $N_1 \sim$Poisson(2), $N_3 \sim$ Poisson(1). 必须用插值来求分布函数吗?

9. $\lambda p(1) = \alpha$, $2\lambda p(2) = 2\alpha$ 且 $p(1) + p(2) = 1 - p(0)$.

10. $\pi(2.5) = 1.4014$.

11. 从 $E[(S-0)_+]$ 中消去 (3.34).

12. 从 $E[(S-(d-1))_+^2] - E[(S-d)_+^2] = \cdots$ 开始. 如果 $p(d)$ 为所要计算的量, 则 $p(d-1) - p(d) = 2\pi(d-1) - 1 + F(d-1)$.

§3.6

1. 中心极限定理法: 0.977; 平换伽玛近似法: 0.968; NP 近似法: 0.968.

2. $\alpha = 15$, $\beta = 0.25$, $x_0 = -20$. NP: $F_S(67.76) \approx 0.95$, 且 $F_S(E[S] + 3\sqrt{\mathrm{Var}[S]}) \approx 0.994$ (注意: $\Phi(3) = 0.999$).

§3.7

1. 如果 S^* 是一个以 $\lambda_j = -\log(1 - q_j)$ 为参数的聚合模型的近似, 证 $\lambda_j > q_j$, 于是 $E[S^*] = \sum_j \lambda_j b_j > E[S]$; 对方差做类似处理.

2. $\widetilde{S}$: $E = 2.25$, $V = 3.6875$, $\gamma = 6.41655\sigma^{-3} = 0.906$. $S \sim$ 复合泊松分布, 其中 $\lambda = 1.5$, $p(1) = p(2) = 0.5$, 因此 $E = 2.25$, $V = 3.75$, $\gamma = 6.75\sigma^{-3} = 0.930$. $\widetilde{S}$: $\alpha = 4.871$, $\beta = 1.149$, $x_0 = -1.988$. S: $\alpha = 4.630$, $\beta = 1.111$, $x_0 = -1.917$.

4. 第 2 种情况. 计算出的方差比近似等于 80%.

5. 注意到这些项的第一个因子随 x 递减.

6. $\mathrm{Max}[S]=3000$, $\mathrm{Max}[T]=4000$; $E[S]=E[T]=30$; $\mathrm{Var}[S]=49.5$, $\mathrm{Var}[T]=49.55$; 两者的理赔次数分布均为 $B(2000,0.01)$ 分布; $S\sim$ 二项随机变量的加权和, $T\sim$ 复合二项分布. 如果 $B_i\sim$ 泊松分布, 则 $S\equiv T\sim$ 复合泊松分布.

7. 复合泊松分布, 其参数值 $10\Pr[X>\beta]$, 其中理赔额 $\sim U(0,2000-\beta)$. 或复合泊松, 参数值 10, 理赔额 $\sim(X-\beta)_+$.

8. P1: $z_1^2n_1q_1(1-q_1)+\cdots$; P2: 更大. 在聚合模型下相等, 在"开放"聚合模型下不等.

9. 用一个复合 Poisson(1) 变量来代表第 1 类保单的理赔, 便得到随机变量 $\sim N_1+3N_3$, 其中 $N_k\sim\mathrm{Poisson}(q_1p_1(k))$, $k=1,3$. 所以 $T\sim M_1+2M_2+3M_3$, 其中 $M_1\sim\mathrm{Poisson}(25)$, $M_2\sim\mathrm{Poisson}(20)$, $M_3\sim\mathrm{Poisson}(5)$. Panjer: $f(s)=\frac{1}{s}\sum_h h\lambda p(h)f(s-h)=\frac{1}{s}[25f(s-1)+40f(s-2)+15f(s-3)]$. 应用 NP 或者平移伽玛近似.

10. $B(n,q)$, $\mathrm{Poisson}(nq)$, $\mathrm{Poisson}(-n\log(1-q))$, 否.

§3.8

1. 还要利用 $E[Y^j]=m_{\log Y}(j)$, 其中矩母函数可以在表 A 中找到.

2. 如果 $X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$, 则 $\beta X\sim\Gamma(\alpha,1)$; 如果 $X\sim\mathrm{Pareto}(\alpha,x_0)$, 则 $X/x_0\sim\mathrm{Pareto}(\alpha,1)$; 如果 $X\sim\mathrm{LN}(\mu,\sigma^2)$, 则 $e^{-\mu}X\sim\mathrm{LN}(0,\sigma^2)$; 如果 $X\sim\mathrm{IG}(\alpha,\beta)$, 则 $\beta X\sim\mathrm{IG}(\alpha,1)$.

4. 关键的一步是对所有 $x\geqslant 0$ 有 $p(x)\geqslant p(0)e^{-\beta x}$.

5. $\Pr[Z-z>y|Z>z]=1-q(z)e^{-\alpha y}-(1-q(z))e^{-\beta y}$, 其中 $q(z)=\frac{qe^{-\alpha z}}{qe^{-\alpha z}+(1-q)e^{-\beta z}}$ 是一个单调函数, 满足 $q(0)=q$ 和 $q(\infty)=1$.

6. 对数正态分布的中位数是 e^{μ}. 众数: 对 $x=e^{\mu-\sigma^2}$ 有 $f'(x)=0$.

§3.9

1. 1000×0.004; $1000\times .0070$ (NP 法) 或者 $1000\times .0068$ (平换伽玛近似法).

2. 由 $E[(S-0)_+]=E[S]$ 出发做减法.

3. 对 $(X-\mu)/\sigma$ (而不是 X) 进行处理. $E[(X-\mu)_+]=\sigma\phi(0)=\cdots$.

4. 为了计算 $E[(S-(S-d)_+)^2]$, 对 $E[(S-d)^2]$ 进行类似于 (3.29) 的近似.

5. $\lambda x_0^{\alpha}d^{1-\alpha}/(\alpha-1)$.

6. 记 $X=e^Y$, 从而 $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$, 再求 $E[(e^Y-d)_+]$.

7. $\pi(d)$ 下凸.

8. 在 $d=1$ 处求 $E[(N-d)_+]$ 的左、右导数. $\Pr[N=1]=0.2408$.

9. 利用 U 的对称性.

10. 利用习题 §3.2 第 1 题和习题 §3.9 第 9 题.

§3.10

1. 利用分布积分以及 $\int_0^\infty(\mu-t)_+dt=0.5\mu^2$. 函数 $(\mu-t)_+$ 由停止损失变换的两条切线组成.

4. 证明并利用 $(x-t)_++(y-d)_+\geqslant(x+y-(t+d))_+$, 再利用归纳法. 进一步, 利用给出的经验法则来验证保费大致相等.

5. $\mathrm{Var}[T]/\mathrm{Var}[S]=1.081$; 对 $d=0.5,1,1.5$, 分别有 $E[(T-d)_+]/E[(S-d)_+]=1.022,1.176$ 和 1.221. 注意到 $d=0.5\approx\mu+\sigma/6$, $d=1\approx\mu+\sigma$, $d=1.5\approx\mu+2\sigma$.

6. 取 $f(x)=E[(U-x)_+]-E[(W-x)_+]$ 和 $\delta=1$; 我们有 $f(x)=0$, $x\leqslant 0$.

第 4 章

§4.2

1. $\frac{f(t-s)dt}{1-F(t-s)}$.

2. $p_n(t+dt)=p_n(t)+p_n'(t)dt=(1-\lambda dt)p_n(t)+\lambda dt\, p_{n-1}(t)$. 两边都表示在时间段 $(0,t+dt)$ 发生 $n+1$ 个理赔的概率.

§4.3

1. 进一步参阅 (4.11) 之后的注.

2. 利用 (4.10).

3. 当 $t<3$ 时有 $m_X(t)<\infty$, 且 $R=1$.

4. $\theta=2.03$.

5. $c=\log m_S(R)/R$, 其中 $R=|\log\varepsilon|/u$.

6. 利用 Excel 的“目标探索”功能可以得到 $R=0.316$.

7. $R=1$; $\theta=1.52>0.4$ (或者利用 $dR/d\theta>0$).

8. 从 $1+(1+\theta)\mu_1 R=m_X(R)=(1-R)^{-2}$ 中解出 θ 和 R, 其中 $0<R<1$; 由此可得 $R=[3+4\theta-\sqrt{9+8\theta}]/[4(1+\theta)]$. 否; $R<1$ 必须成立.

9. 当 $r\leqslant 0$ 和 $r\leqslant\beta/2$ 时 $m_Y(r)$ 有限, 其它情况时无限.

10. 考虑 $\frac{dR}{dc}$. 然后利用 $\frac{dc}{dR}\geqslant 0$.

§4.4

1. 利用同样的理赔额和理赔发生时间来比较 $\theta<0$ 和 $\theta=0$ 下的盈余.

2. 见 (4.23): $(1+\theta)^{-1}=0.5$, 因此 $\theta=1$, 由 $\theta/\{(1+\theta)\mu_1\}=1$ 得到 $\mu_1=0.5$, 于是 $X\sim$ 参数为 $\beta=2$ 的指数分布; λ 任意. 或者: 理赔额 $\sim IX$, 其中 $I\sim$ Bernoulli(q) 分布.

3. 由推论 4.4.2 得 $R=1$; 否; $(\alpha+\beta e^{-u})^{-1}$.

4. $1-\psi(0)>\Pr[$ 在 ε/c 之前没有理赔发生且从 ε 起永不破产 $]>0$. 或者: $\psi(\varepsilon)<1$, 从而 $R>0$, 且由 (4.17) 得 $\psi(0)<1$.

5. 由 $m_X(6)=\infty$ 我们排除 $R=6$; $R=0$ 也不可能. 然后结合上题并观察 $\psi(0)$ 及对应于 u 取大值的 $\psi(u)$.

6. $R=0.5$; $c=\frac{2}{5}$.

§4.5

1. $U(\widetilde{T})=-1$; $\widetilde{\psi}(u)=e^{-\widetilde{R}(u+1)}$, 其中 $\widetilde{R}=\log(p/q)$.

2. 对于那些不是过于厌恶风险的决策者来说, 显然只有调节系数为 $\widetilde{R}$ 的过程在期望效应意义下才是有利可图的.

3. 破产可能只发生在连续时间模型中, 而不发生在离散时间模型中; 但反之不成立; $\Pr[T\leqslant\widetilde{T}]=1$ 表示对所有的 u 有 $\widetilde{\psi}(u)\leqslant\psi(u)$.

4. 利用 (4.23). $\widetilde{\psi}(u)\leqslant e^{-\widetilde{R}u}=e^{-Ru}$, 其中 $R=1$. 不过一个更好的界是 $\widetilde{\psi}(u)\leqslant\psi(u)$.

§4.6

1. $R_h = \{\theta-\alpha\xi\}/\{(1-\alpha)(1+\theta-\alpha(1+\xi))\}$; 再保后的相对安全负荷: $\{\theta-\alpha\xi\}/\{1-\alpha\}$. α 必须满足 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 和 $\alpha < \theta/\xi$.

2. 再保后的安全负荷: $\{\theta-\xi e^{-\beta}\}/\{1-e^{-\beta}\}$.

3. 当 $\alpha = 0.25$ 时 $\widetilde{R} = \{5-8\alpha\}/\{2(1-\alpha)^2\}$ 取最大值.

4. $R = (1-2\alpha)/\{(1-\alpha)(3-4\alpha)\}$, 故 $0 \leqslant \alpha < 0.5$.

§4.7

1. $L_1 \sim U(0,b)$; $L_1 \sim$ 与理赔参数值相同的指数分布.

2. $L = 0$ 意味着绝不会到达初始值以下.

3. $\psi(0) = \cdots$ 以及 $\cdots$, 于是 $\cdots$.

§4.8

1. $\gamma = 1+\theta$.

3. $R = 2$, $\theta = -1+1/(0.5+\alpha)$. $\theta > 0 \Rightarrow \cdots$. 利用当 $\psi'(0) < 0$ 时 $\psi(u)$ 单调减.

4. $\psi(u) = \frac{4}{9}e^{-2u} + \frac{1}{9}e^{-4u}$.

5. e^{-2u}; $I \sim \text{Bernoulli}(\frac{1}{9})$.

6. $\psi(u) = \frac{2}{5}e^{-0.3u} - \frac{1}{15}e^{-0.8u}$.

7. $\psi(u) = \frac{5}{8}e^{-u} - \frac{1}{24}e^{-5u}$.

8. 可以得到一个非增阶梯函数, 见 (4.28). 具有这种结构的密度函数是一些 $U(0,x)$ 分布的混合; 单峰, 众数为 0.

10. $p(x) = 2(e^{-x} - e^{-2x})$; 注意 $R = 2.5$ 时.

11. $c = c_1 + c_2$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 9$, $p(x) = \frac{1}{9}p_1(x) + \frac{8}{9}p_2(x) = \cdots$, 等等.

§4.9

1. $\beta = E[L]/\{E[L^2] - (1+\theta)E^2[L]\}$; $\alpha = (1+\theta)\beta E[L]$.

第 5 章

§5.2

1. 对 (5.6) 求导并令其等于 0.

2. 组合保费 = 49.17; 最优的 $u = 104.21$; 最优的 $R = 0.0287$; A 和 B 的保费分别为 5.72 和 1.0287 (方差保费), 5.90 和 1.0299 (指数保费).

§5.3

1. (a) 1; (b),(c),(d) $1+\alpha$; (e) $-\log(1-\alpha)/\alpha$; (h) $-\log\varepsilon$; (i) ∞; (j) $(1-h)^{-1}$.

2. 验证 $(\alpha^2\pi'[X;\alpha])' = \alpha\text{Var}[X_\alpha]$, 其中 X_α 表示 X 的参数为 $\alpha > 0$ 的 Esscher 变换.

3. 如果 $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$, 则保费是 $1.1\lambda\alpha/\beta$.

4. $\frac{\lambda}{\gamma}[m_X(\gamma)-1]$.

5. $\frac{\lambda\alpha}{\beta}[1+\frac{\gamma}{\beta}(1+\alpha)]$.

6. $\kappa_X(h) = \log E[e^{hX}]$, 等等.

7. 参数值不同, 但仍属于同一个族.

8. 注意到 Esscher 保费的导数 = Esscher 变换的方差.

9. $\lambda E[Xe^{hX}]$.

10. 利用习题 §5.3 第 6 题和 Taylor 展式.

11. 利用 $E[e^{\alpha X}] \geqslant e^{\alpha(b-\varepsilon)} \Pr[X \geqslant b-\varepsilon]$.

§5.4

3. 这样的一个混合是可加的.

4. X 和 Y 不是正相关的; 利用 $|r(X,Y)| \leqslant 1$.

§5.5

2. Cauchy-Schwarz 不等式; 从一般的数理统计教科书都可以找到.

第 6 章

§6.2

1. 45%; 760% 和 900%.

§6.3

1. 阅读 (6.8) 前面的文字.

2. P^2 的所有的行均为 (p, pq, q^2).

3. $l(\infty) = (p,q)$, $e(\lambda) = \lambda e^{-\lambda}(c-a)/[c(1-e^{-\lambda}) + ae^{-\lambda}]$.

4. 利用 $b(\lambda) > (c-b)(1-e^{-2\lambda})$, 并注意对 $u \geqslant 0$ 有 $ue^{-u}/(1-e^{-u}) = u/(e^u - 1) \leqslant 1$. 当 $b \ll c$ 且 λ 较小时有 $e(\lambda) \approx 1$.

7. $\alpha = 0.3$.

8. $e(0.050) \approx 0.50$.

9. $s/(1-t) = p/(1-p)$.

第 7 章

§7.2

1. 建立这些协方差关系式的根本依据在于 $\mathrm{Cov}[\Xi_i + \Xi_{it}, \Xi_j + \Xi_{ju}]$ 当 $i \neq j$ 时等于 0; 当 $i = j$ 且 $t \neq u$ 时等于 a; 而当 $i = j$ 且 $t = u$ 时等于 $a + s^2$.

4. a) 最小化 $\mathrm{Var}[\{X_{j,T+1} - m - \Xi_j\} + \{m + \Xi_j - z\overline{X}_j - (1-z)\overline{X}\}]$. b) $z(\overline{X}_j - \overline{X})$.

5. $az + a(1-z^2)/(Jz)$; $s^2 + a(1-z)\{1 + (1-z)/(Jz)\}$; $a(1-z)\{1+(1-z)/(Jz)\}$.

6. $z\overline{X}_j + (1-z)\overline{X}/[1 + a/(Jzm^2)] \leqslant (7.9)$, 从而偏小.

7. 缴纳的保费总和是 $J\overline{X}$.

8. 利用 $E[(\overline{X}_j - \overline{X})^2] = (a + s^2/T)(1 - 1/J)$ 和 $E[(X_{jt} - \overline{X}_j)^2] = s^2(1 - 1/T)$.

9. 令 $\frac{d}{dp}E[(Y-p)^2] = 0$, 或计算 $E[\{(Y-\mu) + (\mu - p)\}^2] = \cdots$.

10. 对角分块为一些矩阵 $aJ + s^2 I$, 其中 I 是单位阵, J 的元素全为 1.

§7.3

1. 对 $\mathrm{Cov}[X,Y|Z] = E[XY|Z] - E[X|Z]E[Y|Z]$ 取期望.

§7.4

1. 该约束最小化问题的拉格朗日目标函数是 $\sum_t \alpha_t^2 s^2/w_t - 2\lambda(\alpha_\Sigma - 1)$. 对每一个 i, 令关于 α_i 的导数为 0 得到 $\alpha_i/w_i = \lambda/s^2$. 或者 $\sum_t \alpha_t^2/w_t \sum_t(\{\alpha_t - w_t/w_\Sigma\} + w_t/w_\Sigma)^2/w_t = \cdots$.

2. 见本节末尾的注.

3. 仿定理 7.4.1 的证明, 从 m (而不是 $m + \Xi_j$) 的一个线性预测量的 MSE 出发.

4. 类似于定理 7.2.4; 利用习题 §7.2 第 9 题.

9. 见注 7.4.3.

10. $\widetilde{s^2}=8$, $\widetilde{\alpha}=11/3 \Rightarrow \widetilde{z}=\cdots \Rightarrow \widetilde{m+\Xi_j}=12.14, 13.88, 10.98$.

§7.5

1. 写下似然函数，然后取对数，再求导并令导数为 0.
2. 利用 Bayes 法则.
3. 利用习题 §7.3 第 1 题来求 $\mathrm{Cov}[K_1, K_2]$.
4. 求密度函数的导数并令其为 0.
5. $\widetilde{\alpha}=1.6049$; $\widetilde{\tau}=15.8778$; $\chi^2=0.21$.
6. 利用 $\Lambda \equiv E[N|\Lambda]$.

第 8 章

§8.2

1. μ_i, ψ_i; μ_i, μ_i; $\mu_i, \psi_i\mu_i$; $\mu_i, \psi_i\mu_i^2$; $\mu_i, \psi_i\mu_i(1-\mu_i)$. 参见表 E.
2. 变异系数 = 标准差 / 均值 $=\cdots=\sqrt{\phi}$; 偏度 $=2\sqrt{\phi}$.

§8.3

4. 常值变异系数.
6. 关于 x_iy_j 求得相同的值，但 χ^2 值为原值的 1/10.
8. 对于 Bailey-Simon 方法，该残差之和取负值；对于边缘总和法，该残差之和为零.

§8.4

1. $\hat{L}$ 与 $\widetilde{L}$ 可分别在 (8.22) 中令 $\mu_i=\hat{\mu}_i$ 和 $\mu_i=y_i$ 得到.
3. 在 (8.11) 中对 i 与 j 两者求和.

§8.5

3. IX⊂VIII⊂VII⊂IV⊂I.
4. 有一个常数项. 对于年龄类、地区与性别分别有 4 个、 2 个与 1 个额外的参数.

§8.6

1. 自 $e^{l(y)}\frac{\partial l}{\partial\theta}=\frac{\partial e^{l(y)}}{\partial\theta}$ 出发，交换积分与求偏导的运算顺序.
2. 参见例 8.6.3.
3. 利用 $\frac{\partial l}{\partial\beta_j}=\frac{\partial l}{\partial\theta}\frac{d\theta}{d\mu}\frac{d\mu}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta_j}=\cdots$, 参见 (8.47).
5. 对于 $y=b'(\theta)=\cdots$, 运用 $\frac{\partial l}{\partial\theta}=0$.
6. 在 $\log f_Y(y;\theta,\psi)$ 中分别令 $\theta=\widetilde{\theta}_i$ 与 $\theta=\hat{\theta}_i$, 见 (8.29) 式，再参见 (8.21), (8.23) 与 (8.26).
7. 自 $b(\theta)$ 与 $\theta(\mu)$ 推导 $b(\theta(\mu))$.
8. 计算密度或比较矩母函数.

第 9 章

§9.1

1. 24.

§9.2

2. $\mathrm{LN}(\mu,\sigma^2)$ 分布的众数为 $e^{\mu-\sigma^2}$, 见习题 §3.8 第 6 题.
5. 参见前一章.

§9.3

1. 在第一个模型中以 $\alpha_i\gamma^{i-1}$ 置换 α_i.

2. 当 $t \geqslant 4$ 时, $3(t-1) < t(t+1)/2$.

4. (9.13) 蕴涵 $\hat{X}_{11} = 102.3 \times 1.00 \times 1 \times 0.42^0 = 102.3$; (9.14) 蕴涵 $\hat{X}_{11} = 101.1$.

5. 利用 $\sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1} = (1-\beta)^{-1}$.

第 10 章

§10.2

1. 利用定理 10.2.3.

2. 利用前一道习题, 或利用伽玛分布的性质.

3. 对适当选取的 Bernoulli 随机变量, 比较 B_i 与 A_iB_i.

6. 对于 $i = 0, 1, 2, 3$, 验证 $F_N(i) \geqslant F_M(i)$.

7. 取 $Y = X + I$, 其中 $I = I(X)$ 当 $X \in \{0, 2\}$ 时为 0, 否则 $I = 1$. 或者画出概率 $\Pr[X = i, Y = j]$ 的表格, 使得边际概率满足要求, 并且 $\Pr[X = i, Y = j] = 0, \forall i > j$.

§10.3

1. 考察概率函数之比. 为回避收敛性问题, 把停止损失保费按如下方式写成有限项之和: $\sum_d^{\infty} = \sum_0^{\infty} - \sum_0^{d-1}$.

2. 利用前一习题与习题 §10.2 第 3 题.

3. 利用对任意非负的 x, y 和 d, 有 $(x+y-d)_+ \leqslant (x - \frac{1}{2}d)_+ + (y - \frac{1}{2}d)_+$. 由此得 $E[(X_1 + X_2 - d)_+] \leqslant 2E[(X_1 - 0.5d)_+] = E[(2X_1 - d)_+]$; 独立性不是必要的.

4. $E[(X - a_1)_+] = E[(Y - a_1)_+]$, $E[(X - a_3)_+] = E[(Y - a_3)_+]$; 所以 $E[(X-d)_+]$ 与 $E[(Y-d)_+]$ 不可能交叉. 或分布函数交叉一次, 概率密度 (或概率函数) 交叉两次. 反例可参见例 10.4.2.

5. 设 $G(x) = p$, $x \in (a, b)$; $F(x_0 + 0) \geqslant p$, $F(x_0 - 0) < p$. 则于 $(-\infty, x_0)$ 上有 $F \leqslant G$, 于 (x_0, ∞) 上有 $F \geqslant G$. 注意除非 $F \equiv G$, $F \geqslant G$ 处处成立, 而 $F \leqslant G$ 不可能处处成立. 否则会导致均值不同.

7. 如果 H 为 $U(0,3)$ 的分布函数, 那么考虑如下的 G: 于 $(-\infty, 1.5)$ 上, $G = F$; 于 $[1.5, \infty)$ 上, $G = H$.

8. 见第 4 题.

9. a) 考虑概率函数之比; b) 对 Poisson($E[M]$) 分布应用 a).

10. $X \leqslant_e Y$.

14. 考虑 $m_Y(t) - m_X(t)$ 的级数展开.

15. 否, 否, 否.

16. 当 $d \geqslant 0.5$ 时, $V \leqslant_{SL} W$. 当 $d < 0.5$ 时, 不可能有 $V \leqslant_{SL} W$. 如果 $E[W] \leqslant E[V]$ (因而 $d \leqslant 1 - \sqrt{1/2}$), 那么 $W \leqslant_{SL} V$, 因为分布函数交叉一次.

17. 见定理 10.6.2.

18. 由前面的习题得 $X_1 \leqslant_{SL} X_2 \leqslant_{SL} X_3 \leqslant_{SL} X_4$. 由扩散性, $X_2 \leqslant_{SL} X_5$. 因为 $\mathrm{Var}[X_5] > \mathrm{Var}[X_3]$, 但 $\Pr[X_3 > 15] > 0$, 所以 $X_3 \not\leqslant_{SL} X_5$ 和 $X_5 \not\leqslant_{SL} X_3$; 类似的结论对 X_4

也成立. 为证明指数序不成立, 考虑 $e^{5(e^t-1)}/\{2/3+1/3e^{5t}\}$ 当 $t\to\infty$ 时的极限, 或利用类似于上面的讨论.

19. 否: $E[X_p]\equiv 1$. X_p 的矩母函数为 $\{1-t+t^2p(1-p)\}^{-1}$. 利用 $(p(Y-d)+(1-p)(Z-d))_+\leqslant p(Y-d)_++(1-p)(Z-d)_+$, $E[X_p|X_{1/2}]\equiv X_{1/2}$ 以及推论 10.3.3.

20. 因为 G 和 V 分别是理赔分布为 $F(\cdot)$ 的复合分布的分布函数, 所以确定 q_i 使得 $(q_0,q_1,q_2)\leqslant_{SL}(1/4,1/4,1/4,1/4)$.

21. 把有关项进行归类, 记 $S_2=2N_2+\cdots+5N_5$, $S_1=N_1+S_2$. 或利用 $S_3\sim S_2$, 其中 S_3 为一个复合泊松分布, 参数 $\lambda_3=5$, 理赔概率函数 $p_3(x)=1/5$, $x=0,2,3,4,5$. 注意: 只需要比较具有相同参数 λ 的复合泊松分布.

22. $E[X]=E[Y]$ 排除了一般随机序存在的可能. 由凸性得 $E[(Y-d)_+]=\frac{1}{2}\{E[(\frac{3}{2}X-d)_+]+E[(\frac{1}{2}X-d)_+]\}=\frac{3}{4}E[(X-2d/3)_+]+\frac{1}{4}E[(X-2d)_+]\geqslant E[(X-d)_+]$

23. $\lambda=0$; λ 使得 $e^{-\lambda}\leqslant 1/4$ 和 $(1+\lambda)e^{-\lambda}\leqslant 3/4$, 因此 $\cdots$; $\lambda\geqslant 1$.

25. 如果 $p_j<\overline{p}<p_k$, 那么分别用 $B_j\sim$Bernoulli$(\overline{p})$ 和 $B_k\sim$Bernoulli$(p_j+p_k-\overline{p})$ 替换 A_j 和 A_k, 并利用习题 §10.3 第 8 题. 归纳法证明.

26. 考察何时概率函数交叉一次, 何时交叉两次. 当 $p^5\geqslant\frac{1}{6}$ 或 $(1-p)^5\geqslant\frac{1}{6}$ 时存在一般随机序关系, 当 $p^5\geqslant\frac{1}{6}$ (因而 $p\geqslant 0.699$) 时存在停止损失序关系, 当 $p\leqslant 0.5$ 时存在反向停止损失序 关系. 证明: 当 $p\in(\frac{1}{2},\sqrt[5]{1/6})$ 时, $X\leqslant_{\rm SL}Y$ 或 $Y\leqslant_{\rm SL}X$ 不能成立.

§10.4

1. 分布函数关于 p 与 μ 单调. 停止损失保费为 $p\mu e^{-d/\mu}$. 当均值 $p\mu$ 保持不变时, 分布在停止损失序意义下关于 μ 单调.

2. 利用前面建立的有关二项分布之间序关系的结果.

3. $m_M(\log m_X(t))\leqslant m_M(\log m_Y(t))\leqslant m_N(\log m_Y(t))$, $t\geqslant 0$.

4. $X\leqslant_{\rm e}Y$.

6. 由 (3.82) 可知, 根据较大的偏度蕴涵较厚的尾这一事实来推断停止损失保费也较大是不正确的.

7. 首先证明如果在每一类中只有一个保单 (而不是 1000 个保单), 则 $S\leqslant_{\rm SL}T$.

8. 比较均值, 即停止损失保费于 $d=0$ 点的值, 以及比较当 d 较大时停止损失保费.

9. 见本节最后一句话.

10. $m_X(t)-m_Y(t)=\cdots$

§10.5

1. 如果 $E[(X-d)_+]>E[(Y-d)_+]$, 那么根据 X 的停止损失变换的形式可知 $E[(X-t)_+]>E[(Y-t)_+]$ 对所有的 t 成立. 考虑到 (3.82), 这和 X 与 Y 的同均值、同方差条件相矛盾.

3. 如果 (10.36) 能够应用 (即对应的条件满足), 则由 (10.36) 决定的两点分布的停止损失保费最大. 否则, 考虑支撑集 $\{0,\bar{0}\}$ 和 $\{b,\bar{b}\}$ 对应的随机变量的停止损失保费中最大的.

5. 分别为 $\{b,\bar{b}\}$ 与 $\{0,\bar{0}\}$. 把 3 阶矩用 $t=(d-\mu)/\sigma$ 表示.

6. 对于 $d=0$ 和 $d=b$, 分别考虑 $E[(X-d)(X-\bar{d})^2]$.

7. 利用分散与集中的方法. 方差: $\lambda E^2[Y]$, $\lambda E[Y^2]$, $\lambda bE[Y]$.

§10.6

3. $X \sim$ Bernoulli(0.5), $Y \equiv 1$.

4. 由经验法则 3.10.1, 停止损失保费之比大约为 5 : 3.

6. 仅证必要性. 假设结论不成立, 则在同单调分布函数 $H(x,y) = \min\{F_X(x), F_Y(y)\}$ 支撑集中存在某点 (x,y), $x > y$, 使得我们一定有 $H(x,y) > H(y,y)$. 但这是不可能的, 因为 $F_X(y) \geqslant F_Y(y)$.

7. 在联合概率函数表格中, 每一行和每一列恰有一个元为正. 所有取值为正的元构成一条对角线.

10. 给定 $Z = z$, X 的条件分布仍然是正态分布, 参数分别为 $E[X|Z = z] = E[X] + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Z}(z - E[Z])$ 和 $\mathrm{Var}[X|Z = z] = \sigma_X^2(1 - \rho^2)$, 其中 $\rho = r(X, Z)$.

12. $\Pr[g_i(U,Z) \leqslant x] = \int \Pr[F^{-1}_{X_i|Z=z}(U) \leqslant x]dF_Z(z) = \cdots$.

13. $\Pr[X \leqslant x|Y \leqslant y] = \Pr[X \leqslant x, Y \leqslant y]/\Pr[Y \leqslant y] \geqslant \cdots$, 因此, $\cdots$.

14. 利用 $\Pr[X \leqslant x_1, X \leqslant x_2] \geqslant \Pr[X \leqslant x_1]\Pr[X \leqslant x_2]$, 并对 $Y = y$ 和 $Z = z$ 取条件.

15. 当 $|\alpha| \leqslant 1$ 时, 证明 $C(1,1) = 1$, $c(u,v) \geqslant 0$, 且边际分布皆为 $U(0,1)$. 为确定 X 和 Y 之间的 Spearman 秩相关系数, 计算 $\iint uv\, c(u,v)\, du dv$ 以证明该系数为 $\alpha/12$.

16. $\Pr[X \leqslant x, Y \leqslant y] = \Pr[F_X(X) \leqslant F_X(x), F_Y(Y) \leqslant F_Y(y)]$.

17. $\Pr[(X - X')(Y - Y') > 0] = 2\int \Pr[X < x, Y < y|X' = x, Y' = y]dF(x,y)$.

18. $\rho = 1$ 和 $\tau = 1$ 皆蕴涵同单调性.

19. $r(X,Y) = \{e^{\sigma} - 1\}/\sqrt{(e^{\sigma^2} - 1)(e - 1)}$. 因为当 $\sigma \to \infty$ 时, 有 $r(X,Y) \downarrow 0$, 所以存在完全相依的随机变量, 其相关系数可任意接近于 0. 但对任意 σ, $\rho = \tau = 1$, 因此 Kendall τ 与 Spearman ρ 相依度量比 Pearson 相关系数表现得要好.

20. 考虑凸函数 $f(x) = x^2$. 对所有的 x 和 y, $\Pr[X \leqslant x]\Pr[Y \leqslant y] = \min\{\Pr[X \leqslant x], \Pr[Y \leqslant y]\}$ 成立意味着什么?

21. 确定 $X + Y$ 和 $X^c + Y^c$ 的分布.

22. 对 $X = x$ 取条件, 则 S_u' 的第一项以概率 1 等于 x, 第二项的分布即为给定 $X = x$ 之下 Y 的条件分布.



注记及参考文献

第 1 章

精算领域里有关效用理论和保险的基本内容可追溯到 Borch (1968, 1974). 效用概念的基本思想可回溯到 Von Neumann, Morgenstern (1944). Allais (1953) 描述了 Allais 悖论. 有关一个保单组合的稳定性 (见第 5 章) 可以在 Bühlmann (1970) 中找到. 最近, 精算文献中出现了基于 Yaari 风险对偶理论的风险的另一种排序. 参考文献有 Wang, Young (1998) 和 Denuit 等 (1999). 不论是效用理论还是 Yaari 的对偶理论都可以用来构造金融与保险中的风险度量, 这些度量在偿付能力框架里是重要的, 见 Wason 等 (2001).

第 2 章

个体风险模型方面好的参考书有 Gerber (1979) 和 Bowers 等 (1986, 1997). 自从 Panjer (1981) 创新性工作发表以来, 人们已给出了许多用以计算个体风险模型分布的递推关系式, 见 Sundt, Jewell (1981). 有关不同方法方面的一个综述, 可参阅 De Pril (1986) 和 Dhaene, De Pril (1994).

第 3 章

关于聚合模型的内容取材于提及的教科书见 Bowers 等 (1986, 1997). 早期的文献有 Beard 等 (1977, 1984), 其中包含了大量有关 NP 近似法的内容. 其它相关的参考书有 Seal (1969), Bühlmann(1970), Gerber(1979), Goovaerts 等 (1990), Heilmann (1988), Sundt (1991) 以及近来的 Rolski 等 (1998). 在聚合模型中人们假设理赔额是相互独立的, 一个新的趋势是研究相依风险的和 (可参阅 Dhaene 等(2002a,b)). Hogg, Klugman(1984) 是一本从统计角度研究损失分布的教材. 此外, Ter Berg(1980a, 1980b, 1994) 给出了逆高斯分布在精算学中的一些应用.

第 4 章

破产理论最初由 Cramér (1930, 1955) 和 Lundberg (1940) 开创, 破产理论的鞅方法由 Gerber (1979) 给出, 破产概率作为一个稳健性准则由 Bühlmann (1970) 描述. 在金融保险建模领域一本必读的教科书是 Beekman (1964), 该书给出了 Poisson 过程和 Wiener 过程之间的联系. 近期的文献还有 Embrechts 等 (1997). 从 Goovaerts, De Vijlder (1984) 算起, 在破产概率的数值计算方面已有大量论文发表. 在离散分布场合关于破产概率的计算程序 (4.49) 可以在 Gerber (1989) 中找到.

第 5 章

本章有关离散破产模型保费原理的内容基于 Bühlmann (1985); 有关通过联营来降低保险风险的内容基于 Gerber (1979). 在 20 世纪 70 年代, 保费原理曾是精算研究的一个热门课题. 该研究的理论基础是 Bühlmann (1970). 相关文献有 Gerber (1979, 1983) 和 Goovaerts 等(1984). 那一阶段研究的主要是带有独立理赔的经典风险模型. 人们首先给出若干关于保费原理应该满足的公理体系, 然后由这些体系出发推导出不同的结果. 研究表明, 不存在统一的公理体系适用于一切的保险情形. 对独立风险来说, 次可加性的经济原理是恰当的, 而在有些场合下只有超可加性才是恰当的. 例如我们考虑地震保险, 承保两个不相关的地震风险的保费

可以等于或者略小于单个保费的和，而当这两个风险相关时，从保险的角度来说总保费就要大于单个保费的和. 保费原理以某种方式提供一个绝对的量，即保户为了规避风险而不得不付的价格. 另一方面，在金融领域出现的风险度量只是相对的，它们只用来为风险划分等级. 保费原理的一些属性也用来推导合适的金融风险度量，不过这样处理时风险的相依结构常常被忽略了. 关于保费原理最近的一些工作请参阅 Wang (1996). 关于 Wang 类保费原理的刻画请参阅 Goovaerts, Dhaene (1998).

第 6 章

关于奖惩系统的理论和实际研究的先驱性工作，人们可以在 Bichsel (1964) 和 Loimaranta (1972) 中找到. 此外， Lemaire (1985) 给出了奖惩系统在保险领域全面的描述. 文献 Frangos, Vrontos (2001) 尝试引入基于理赔强度和理赔大小的惩罚系统. 本章介绍的荷兰奖惩系统完全基于 De Wit 等(1982). 此外， Denuit, Dhaene(2001) 考虑了非对称损失函数情形的奖惩系统.

第 7 章

关于信度理论一般性的概念可以追溯到 Mowbray (1914) 和 Whitney (1918). 完整的理论基础由 Bühlmann (1967, 1969) 奠定. 有多种方法可以用来引入信度理论的概念. 最初的想法是引入一个风险参数 Θ, 该风险参数被假设为一个随机变量，用以刻画某个隐含的风险属性，并且使用最小二乘误差准则. 如 De Vijlder (1996) 的介绍，对数学要求更高的一些手法要用到 Hilbert 空间中投影理论. 当然这些手法都是对相同现象的等价描述. 本书从教学出发，介绍的手法基于一个常常在经济计量学中遇到的方差分量模型. 除了简明、优雅之外，这一方法在正态场合还清晰地给出了与 ANOVA 之间的关系. 关于方差分量模型的教科书有 Searle 等 (1992). 我们局限于一些基本的 Bühlmann 信度模型，这是因为这些模型已经使得我们可以阐述信度理论的一切相关概念了 (包括非齐次性和参数估计等). 关于信度的更完整的处理，我们建议阅读 Dannenburg 等 (1996) 或 Dannenburg (1996) 的博士学位论文，前者是本书第 7 章的基础. 关于奖惩系统的一个凭借信度理论的解释最初由 Norberg (1976) 给出；在负二项模型下的有关论述请参阅 Lemaire (1985).

第 8 章

广义线性模型最初是由 Nelder, Wedderburn (1972) 的论文引入的，此文对于相当广泛的一类统计模型给出了一个统一的描述，这些模型均可表为具有如下性质的指数族型的随机回归：它们的均值借助某种颇为任意的联结函数而和回归量的线性形式相联系. McCullagh, Nelder (1989) 的教材包含了保险费率厘定的若干应用. 广义线性模型应用的更具可读性的介绍是由诸如 SAS 和 GLIM 的手册提供的，详见 Francis 等 (1993). 本章所给出的一些直观方法详见 Van Eeghen 等 (1983). Alting von Geusau (1989) 尝试用一个组合的可加 / 可乘模型去拟合健康保险数据.

第 9 章

对于 IBNR 问题最初的统计处理可以追溯到 Verbeek (1972), 另一篇早期文献是 De Vijlder, Goovaerts (1979), 此文中阐明了该问题的三维性. 各种模型的一种百科大全式的处理由 Taylor (1986) 给出. Verrall (1996, 2000) 探索了 IBNR 问题与广义可加和广义可乘线性模型之间的联系. 超越链梯法的模型是由 Mack (1993) 给出的. 对于由行与列因子解释的具有对数正态索赔额的模型，Doray (1996) 给出了 IBNR 索赔的均值与方差的一致最小方差无偏估计. 尽管上

述所有的统计文献讨论的皆是有关索赔流量估计的统计处理问题，现在的研究重心却逐渐转向确定流量索赔的经济值，此时需考虑折扣因素．统计框架给出了作为现金流的外插索赔数字，而日历年则确定地变成有别于发展年与起始年的另一实质性因素，因为它包含了通胀与折扣．有关这一不同途径的讨论可参看 Goovaerts, Redant (1999).

第 10 章

精算学中停止损失序是由 Bühlmann 等 (1977) 引进．在统计文献有关凸序的研究中，有许多结果推广了停止损失序 (例如，参见 Karlin, Studden (1966))．随机序方面一本标准的参考书是 Shaked, Shanthikumar (1994)．随机序在运筹学和可靠性里的应用可以在 Stoyan (1983) 中找到．近年来，凸序的概念已被用于研究保险的金融方法中，在这里保险风险与金融风险相互融合．研究的对象是相依风险之和．最近，人们发现了一些很有趣的性质，这些性质将发表于本书作者今后所著的书中．同单调风险在这些相依模型中扮演了重要角色．这方面的综述可见 Dhaene 等 (2002).

文献中有些论著也涉及到第 10 章的内容．例如，基于博士论文 Van Heerwaarden (1991) 而写成的专著 Kaas 等 (1994), 同样参见 Goovaerts 等 (1990) 相应的章节．

参 考 文 献

Allais M. (1953). Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'Ecole Americaine. *Econometrica*, 21: 503~546

Alting von Geusau B.J.J. (1989). The application of additive and multiplicative General Linear Interactive Models (GLIM) in health insurance. XXI ASTIN Colloquium, New York

Beard R.E., Pentikäinen T., Pesonen E. (1977, 1984). Risk theory. London: Chapman and Hall

Beekman J.A. (1964). Two stochastic processes. New York: Halsted Press

Bichsel F. (1964). Erfahrungs-Tarifierung in der Motorfahrzeughaftplicht-Versicherung. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, 64: 119~130

Borch K. (1968). The economics of uncertainty. Princeton: Princeton University Press

Borch K. (1974). The mathematical theory of insurance. Toronto: Lexington Books

Bowers N. L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. (1986, 1997). Actuarial mathematics. Itasca, Illinois: Society of Actuaries

Bühlmann H. (1967). Experience rating and credibility I. *ASTIN Bulletin*, 4: 199~207

Bühlmann H. (1969). Experience rating and credibility II. *ASTIN Bulletin*, 5: 157~165

Bühlmann H. (1970). Mathematical methods in risk theory. Berlin: Springer Verlag

Bühlmann H., Gagliardi B., Gerber H.U., Straub E. (1977). Some inequalities for stop-loss premiums. *ASTIN Bulletin*, 9: 169~177

Bühlmann H. (1985). Premium calculation from top down. *ASTIN Bulletin*, 15: 89~101

Cramér H. (1930). On the mathematical theory of risk. Skand. Jubilee Volume, Stockholm

Cramér H. (1955). Collective risk theory, a survey of the theory from the point of view of

stochastic processes. Skand. Jubilee Volume, Stockholm

Dannenburg D.R., Kaas R.,Goovaerts M.J. (1996). Practical actuarial credibility models. Amsterdam: Institute of Actuarial Science

Dannenburg D.R. (1996). Basic actuarial credibility models — Evaluations and extensions. Ph. D. Thesis, Thesis/Tinbergen Institute, Amsterdam

De Pril N. (1986). On the exact computation of the aggregate claims distribution in the individual life model, *ASTIN Bulletin*, 16: 109~112

De Vijlder F. (1996). Advanced risk theory, a self-contained introduction. Brussels: Editions de l'Université de Bruxelles

De Vijlder F., Goovaerts M. J. (eds.) (1979). Proceedings of the first meeting of the contact group Actuarial Sciences. Leuven: Wettelijk Depot D/1979/2376/5

Denuit M., Dhaene J., Van Wouwe M. (1999). The economics of insurance: a review and some recent developments. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, 99: 137~175

Denuit M., Dhaene J. (2001). Bonus-malus scales using exponential loss functions. *Blätter der Deutsche Gesellschaft für Versicherungsmathematik*, 25: 13~27

De Wit G. W. *et al.* (1982). New motor rating structure in the Netherlands. ASTIN-groep Nederland

Dhaene J., De Pril N. (1994). On a class of approximative computation methods in the individual risk model. *Insurance : Mathematics & Economics*, 14: 181~196

Dhaene J., Denuit M., Goovaerts M.J., Kaas R., Vyncke D. (2002a). The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Theory. *Insurance: Mathematics & Economics*, 31: 3~33

Dhaene J., Denuit M., Goovaerts M.J., Kaas R., Vyncke D. (2002b). The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Applications. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31: 133~161

Doray L.G. (1996). UMVUE of the IBNR Reserve in a lognormal linear regression model. *Insurance: Mathematics & Economics*, 18: 43~58

Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. (1997). Modelling extremal events for insurance and finance. Berlin: Springer-Verlag

Francis P., Green M., Payne C. (eds.) (1993). The GLIM System: Generalized Linear Interactive Modelling. Oxford: Oxford University Press

Frangos N., Vrontos S. (2001). Design of optimal bonus-malus systems with a frequency and a severity component on an individual basis in automobile insurance. *ASTIN Bulletin*, 31: 5~26

Gerber H. U. (1979). An introduction to mathematical risk theory. Huebner Foundation Monograph 8, distributed by Richard D. Irwin, Homewood Illinois

Gerber H. U. (1985). On additive principles of zero utility. *Insurance: Mathematics &*

Economics, 4: 249~252

Gerber H. U. (1989). From the convolution of uniform distributions to the probability of ruin. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, 89: 249~252

Goovaerts M. J., De Vijlder F. (1984). A stable recursive algorithm for evaluation of ultimate ruin probabilities. *ASTIN Bulletin*, 14: 53~60

Goovaerts M. J., De Vijlder F., Haezendonck J. (1984). Insurance premiums. Amsterdam: North-Holland

Goovaerts M. J., Dhaene J. (1998). On the characterization of Wang's class of premium principles. *Transactions of the 26th International Congress of Actuaries*, 4: 121~134

Goovaerts M. J., Kaas R., Van Heerwaarden A.E., Bauwelinckx T. (1990). Effective actuarial methods. Amsterdam: North-Holland

Goovaerts M. J., Redant R. (1999). On the distribution of IBNR reserves. *Insurance: Mathematics & Economics*, 25: 1~9

Heilmann W. -R. (1988). Fundamentals of risk theory. Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe

Hogg R. V., Klugman S. A. (1984). Loss distributions. New York: Wiley

Kaas R., Van Heerwaarden A. E., Goovaerts M. J. (1994). Ordering of actuarial risks. Amsterdam: Caire Education Series

Karlin S., Studden W.J. (1966). Tchebycheff systems with applications in analysis and statistics. New York: Interscience Publishers, Wiley

Lemaire J. (1985). Automobile insurance: actuarial models. Dordrecht: Kluwer

Loimaranta K. (1972). Some asymptotic properties of bonus systems, *ASTIN Bulletin*, 6: 233~245

Lundberg O. (1940). On random processes and their applications to sickness and accidents statistics. Uppsala: Inaugural Dissertation

Mack T. (1993). Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates, *ASTIN Bulletin*, 23: 213~225

McCullagh P., Nelder J.A. (1989). Generalized Linear Models. Londen: Chapman and Hall

Mowbray A. H. (1914). How extensive a payroll exposure is necessary to give a dependable pure premium. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 1: 24~30

Nelder J. A., Wedderburn, R. W. M. (1972). Generalized Linear Models. Journal of the Royal Statistical Society, A, 135: 370~384

Norberg R. (1976). A credibility theory for automobile bonus systems. *Scandinavian Actuarial Journal*: 92~107

Panjer H. H. (1981). Recursive evaluation of a family of compound distributions. *ASTIN Bulletin*, 12: 22~26

Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. (1998). Stochastic Processes for Insurance and Finance. Chichester: Wiley

Searle S. R., Casella G., McCulloch C.E. (1992). Variance components. New York: Wiley

Seal H. L. (1969). Stochastic theory of a risk business. New York: Wiley

Shaked M., Shanthikumar J.G. (1994). Stochastic orders and their applications. New York: Academic Press

Stoyan D. (1983). Comparison methods for queues and other stochastic models. New York: Wiley

Sundt B. (1991). An introduction to non-life insurance mathematics. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft e.V

Sundt B., Jewell W.S. (1981). Further results of recursive evaluation of compound distributions. *ASTIN Bulletin*, 12: 27~39

Taylor G. C. (1986). Claims reserving in non-life insurance. Amsterdam: North-Holland

Ter Berg P. (1980a). On the loglinear Poisson and Gamma model. *ASTIN-Bulletin*, 11: 35~40

Ter Berg P. (1980b). Two pragmatic approaches to loglinear claim cost analysis. *ASTIN-Bulletin*, 11: 77~90

Ter Berg P. (1994). Deductibles and the Inverse Gaussian distribution. *ASTIN-Bulletin*, 24: 319~323

Van Eeghen J., Greup E.K., Nijssen J.A. (1983). Rate making. Rotterdam: Nationale-Nederlanden N.V

Van Heerwaarden A.E. (1991). Ordering of risks — Theory and actuarial applications. Amsterdam: Thesis Publishers

Verbeek H. G. (1972). An approach to the analysis of claims experience in motor liability excess of loss reinsurance. *ASTIN Bulletin*, 6: 195~202

Verrall R. (1996). Claims reserving and generalized additive models. *Insurance: Mathematics & Economics*, 19: 31~43

Verrall R. (2000). An investigation into stochastic claims reserving models and the chain-ladder technique. *Insurance: Mathematics & Economics*, 26: 91~99

Von Neumann J., Morgenstern O. (1944). Theory of games and economic behavior. Princeton: Princeton University Press

Wang S. (1996). Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*, 26: 71~92

Wang S., Young V. (1998). Ordering risks: expected utility theory versus Yaari's dual theory of risk. *Insurance: Mathematics & Economics*, 22: 145~161

Wason S. *et al.* (2001). Draft report of solvency working party, prepared for IAA Insurance Regulation Committee. unpublished

Whitney A. W. (1918). The theory of experience rating. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 4: 274~292

Yaari M. E. (1987). The dual theory of choice under risk. *Econometrica*, 55: 95~115

附　表

附表 A　连续分布

分　布	密　度	参数及其取值范围	矩及半不变量	矩母函数
均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$	$a<x<b$	$E=(a+b)/2$, $\mathrm{Var}=(b-a)^2/12$, $\gamma=0$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\sigma>0$ $-\infty<\mu<\infty$	$E=\mu$, $\mathrm{Var}=\sigma^2$, $\gamma=0(\kappa_j=0,\ j\geqslant 3)$	$\exp(\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2)$
伽玛分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$	$\alpha>0,\beta>0$ $x>0$	$E=\alpha/\beta$, $\mathrm{Var}=\alpha/\beta^2$, $\gamma=2\alpha^{-1/2}$	$\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha\ (t<\beta)$
指数分布 $\mathrm{Exp}(\beta)$	$\equiv\mathrm{Gamma}(1,\beta)$			
$\chi^2(k)$	$\equiv\mathrm{Gamma}(k/2,1/2)$			
逆高斯分布 $\mathrm{IG}(\alpha,\beta)$	$\frac{\alpha x^{-3/2}}{\sqrt{2\pi\beta}}\exp\left(\frac{-(\alpha-\beta x)^2}{2\beta x}\right)$ $F(x)=\Phi\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{\beta x}}+\sqrt{\beta x}\right)-e^{2\alpha}\Phi\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{\beta x}}-\sqrt{\beta x}\right)$	$\alpha>0,\beta>0$ $x>0$	$E=\alpha/\beta$, $\mathrm{Var}=\alpha/\beta^2$, $\gamma=3\alpha^{-1/2}$	$e^{\alpha(1-\sqrt{1-2t/\beta})}$ $(t\leqslant\beta/2)$
$\mathrm{Beta}(a,b)$	$\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$	$a>0,b>0$ $0<x<1$	$E=\frac{a}{a+b}$, $\mathrm{Var}=\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$	
对数正态分布 $\mathrm{LN}(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma>0$ $x>0$	$E=e^{\mu+\sigma^2/2}$, $\mathrm{Var}=e^{2\mu+2\sigma^2}-e^{2\mu+\sigma^2}$, $\gamma=c^3+3c$, 其中 $c^2=\mathrm{Var}/E^2$	
$\mathrm{Pareto}(\alpha,x_0)$	$\frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}}$	$\alpha>0$, $x>x_0>0$	$E=\frac{\alpha x_0}{\alpha-1}$, $\mathrm{Var}=\frac{\alpha x_0^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$	

附表 B　离散分布

分布	概率函数	参数及其取值范围	矩及半不变量	矩母函数
二项分布 $B(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	$0\leqslant p\leqslant 1$, $n=1,2,\cdots$, $x=0,1,\cdots,n$	$E=np$, $\mathrm{Var}=np(1-p)$, $\gamma=np(1-p)(1-2p)/\sigma^3$	$(1-p+pe^t)^n$
Bernoulli(p)	$\equiv B(1,p)$			
泊松分布 Poisson(λ)	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$	$\lambda\geqslant 0$, $x=0,1,2,\cdots$	$E=\mathrm{Var}=\lambda$, $\gamma=\lambda^{-1/2}$, $\kappa_j=\lambda,\ j=1,2,\cdots$	$\exp[\lambda(e^t-1)]$
负二项分布 NB(r,p)	$\binom{r+x-1}{x}p^r(1-p)^x$	$r>0$, $0<p\leqslant 1$, $x=0,1,2,\cdots$	$E=r(1-p)/p$, $\mathrm{Var}=r(1-p)/p^2$, $\gamma=r(1-p)(2-p)/p^3/\sigma^3$	$\left(\dfrac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^r$
几何分布 Geometric(p)	$\equiv \mathrm{NB}(1,p)$			

附表 C 标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 及停止损失保费 $\pi(x)$

x	+0.00		+0.05		+0.10		+0.15		+0.20	
	$\Phi(x)$	$\pi(x)$	$\Phi(x)$	$\pi(x)$	$\Phi(x)$	$\pi(x)$	$\Phi(x)$	$\pi(x)$	$\Phi(x)$	$\pi(x)$
0.00	0.500	0.3989	0.520	0.3744	0.540	0.3509	0.560	0.3284	0.579	0.3069
0.25	0.599	0.2863	0.618	0.2668	0.637	0.2481	0.655	0.2304	0.674	0.2137
0.50	0.691	0.1978	0.709	0.1828	0.726	0.1687	0.742	0.1554	0.758	0.1429
0.75	0.773	0.1312	0.788	0.1202	0.802	0.1100	0.816	0.1004	0.829	0.0916
1.00	0.841	0.0833	0.853	0.0757	0.864	0.0686	0.875	0.0621	0.885	0.0561
1.25	0.894	0.0506	0.903	0.0455	0.911	0.0409	0.919	0.0367	0.926	0.0328
1.50	0.933	0.0293	0.939	0.0261	0.945	0.0232	0.951	0.0206	0.955	0.0183
1.75	0.960	0.0162	0.964	0.0143	0.968	0.0126	0.971	0.0111	0.974	0.0097
2.00	0.977	0.0085	0.980	0.0074	0.982	0.0065	0.984	0.0056	0.986	0.0049
2.25	0.988	0.0042	0.989	0.0037	0.991	0.0032	0.992	0.0027	0.993	0.0023
2.50	0.994	0.0020	0.995	0.0017	0.995	0.0015	0.996	0.0012	0.997	0.0011
2.75	0.997	0.0009	0.997	0.0008	0.998	0.0006	0.998	0.0005	0.998	0.0005
3.00	0.999	0.0004	0.999	0.0003	0.999	0.0003	0.999	0.0002	0.999	0.0002
3.25	0.999	0.0002	1.000	0.0001	1.000	0.0001	1.000	0.0001	1.000	0.0001
3.50	1.000	0.0001	1.000	0.0000	1.000	0.0000	1.000	0.0000	1.000	0.0000

附表 D 标准正态分布的几个代表性分位点

x	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(x)$	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995

附表 D 的使用举例: $\Phi(1.17) \approx 0.6\Phi(1+0.15)+0.4\Phi(1+0.20) \approx 0.879$;

$$\Phi^{-1}(0.1) = -1.282; \quad \Phi(-x) = 1-\Phi(x); \quad \pi(-x) = x+\pi(x).$$

NP 近似: 如果 S 的均值为 μ, 方差为 σ^2 且偏度为 γ, 则

$$\Pr\left[\frac{S-\mu}{\sigma} \leqslant x\right] \approx \Phi\left(\sqrt{\frac{9}{\gamma^2}+\frac{6x}{\gamma}+1}-\frac{3}{\gamma}\right)$$

和

$$\Pr\left[\frac{S-\mu}{\sigma} \leqslant s+\frac{\gamma}{6}(s^2-1)\right] \approx \Phi(s).$$

平移伽玛近似: 如果 $G(\cdot;\alpha,\beta)$ 是伽玛分布函数, 则

$$\Pr[S \leqslant x] \approx G(x-x_0;\alpha,\beta), \quad \text{其中} \quad \alpha=\frac{4}{\gamma^2};\beta=\frac{2}{\gamma\sigma};x_0=\mu-\frac{2\sigma}{\gamma}.$$

附表 E　借助常规参数表述的 GLM 中指数散布族的主要子类，μ,ϕ 与 θ,ϕ 重新参数化，若干其他性质

分布	密度 可能的取值范围	重新参数化 $\phi=\cdots$; $\mu=\cdots$ 典则联结 $\theta(\mu)=$	累积量函数 $b(\theta)$ $E[Y;\theta]=\mu(\theta)=b'(\theta)$ $V(\mu)=b''(\theta(\mu))$
$N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\phi=\sigma^2$ $\theta(\mu)=\mu$	$\frac{\theta^2}{2}$ θ 1
$\text{Poisson}(\mu)$	$e^{-\mu}\frac{\mu^y}{y!}$ $y=0,1,2,\cdots$	$\phi=1$ $\theta(\mu)=\log\mu$	e^θ e^θ μ
$\text{Poisson}(\mu,\phi)$	$e^{-\mu/\phi}\frac{(\mu/\phi)^{(y/\phi)}}{(y/\phi)!}$ $y=0,\phi,2\phi,\cdots$	$\theta(\mu)=\log\mu$	e^θ e^θ μ
$B(m,p)$	$\binom{m}{y}p^y(1-p)^{m-y}$ $y=0,\cdots,m$	$\phi=1$; $\mu=mp$ $\theta(\mu)=\log\frac{\mu}{m-\mu}$	$m\log(1+e^\theta)$ $\frac{m\,e^\theta}{1+e^\theta}$ $\mu(1-\frac{\mu}{m})$
$\text{NB}(r,p)$	$\binom{r+y-1}{y}p^r(1-p)^y$ $y=0,1,\cdots$	$\phi=1$; $\mu=\frac{r(1-p)}{p}$ $\theta(\mu)=\log\frac{\mu}{r+\mu}$	$-r\log(1-e^\theta)$ $\frac{r\,e^\theta}{1-e^\theta}$ $\mu(1+\frac{\mu}{r})$
$\Gamma(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\beta^\alpha y^{\alpha-1}e^{-\beta y}$ $y>0$	$\phi=\frac{1}{\alpha}$; $\mu=\frac{\alpha}{\beta}$ $\theta(\mu)=-\frac{1}{\mu}$	$-\log(-\theta)$ $-\frac{1}{\theta}$ μ^2
$\text{IG}(\alpha,\beta)$	$\frac{\alpha y^{-3/2}}{\sqrt{2\pi\beta}}\exp\frac{-(\alpha-\beta y)^2}{2\beta y}$ $y>0$	$\phi=\frac{\beta}{\alpha^2}$; $\mu=\frac{\alpha}{\beta}$ $\theta(\mu)=-\frac{1}{2\mu^2}$	$-\sqrt{-2\theta}$ $\frac{1}{\sqrt{-2\theta}}$ μ^3

索 引

